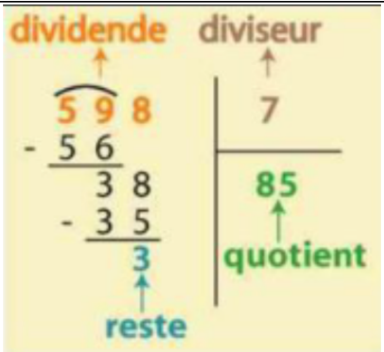
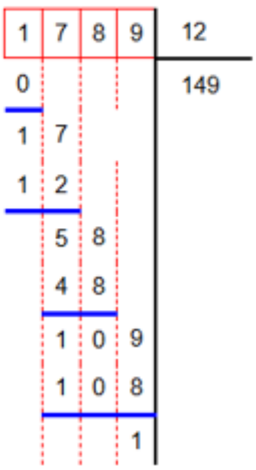
TD 11 – Résolution de problèmes multiplicatifs et arithmétique

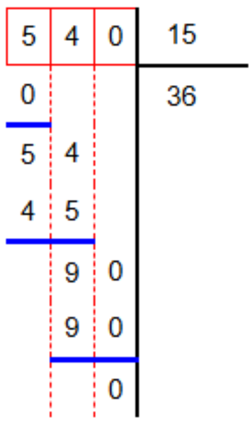
A. Division euclidienne

Pour trouver quotient et reste d'une division euclidienne, on peut la poser.
Exemple : division de 598 par 7 :

	Alors le quotient est 85 et le reste est 3. On écrit le résultat de cette division avec une multiplication et une addition : $$598 = 7 \times 85 + 3$$ On peut en déduire que **7x85 < 598 < 7x86**

Exercice 1. Poser les divisions euclidiennes de 1789 par 12 et de 540 par 15. Donner quotient et reste ainsi que l'écriture du résultat par l'opération.



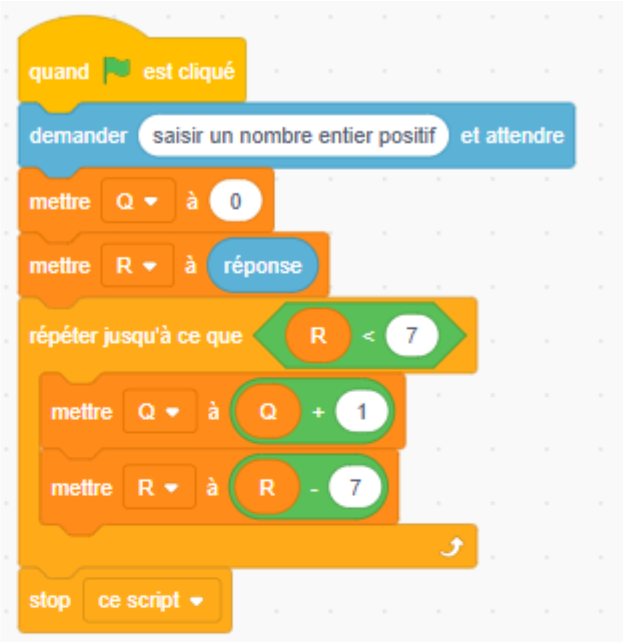


Le **quotient** est 149
Le **reste** est 1
donc $1789 = 12 \times 149 + 1$

Le **quotient** est 36
Le **reste** est 0
donc $540 = 15 \times 36$

Remarque : Le reste de la division euclidienne de 540 par 15 vaut 0, cela signifie que **540 est un multiple de 15** et que **15 est un diviseur de 540.**

Exercice 2. CRPE 2020



1. Si l'utilisateur saisit le nombre 17, quelles seront les valeurs des variables Q et R en fin d'exécution ?

Les valeurs en fin d'exécution seront Q = 2 et R =3.

En effet, au départ Q = 0 et R= 17. Comme R=17<7 alors les instructions situées dans la boucle vont s'exécuter, c'est-à-dire « mettre Q à Q+1 », donc on va ajouter 1 à Q, c'est-à-dire Q = 0+1 = 1 et « mettre R à R-7 » donc on va soustraire 7 à R, donc $R = 17 - 7 = 10$.

On a maintenant R = 10 < 7, donc les instructions situées dans la boucle vont une nouvelle fois s'exécuter, donc Q = 1 + 1 = 2 et $R = 10 - 7 = 3$.

Comme R = 3 < 7, le script s'arrête donc les valeurs de Q et de R en fin d'exécution sont Q = 2 et R = 3.

2. Que représentent, par rapport au nombre saisi par l'utilisateur, les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution ?

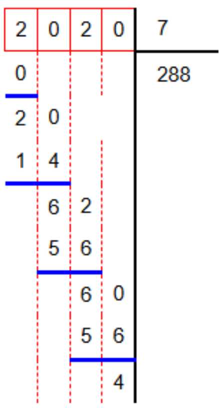
Q désigne le quotient de la division euclidienne du nombre entré par l'utilisateur et de 7 et R désigne le reste de cette division euclidienne.

En effet, la variable Q va « compter » le nombre de fois où l'on peut retirer 7 au nombre entré par l'utilisateur et R va donner le reste (avec R < 7).

3. En déduire les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution lorsque l'utilisateur saisit le nombre 2020.

Lorsque l'utilisateur saisit le nombre 2020, en fin d'exécution Q = 288 et R = 4

En effet, $2020 = 7 \times 288 + 4$



Exercice 3.

On donne 2023=24x83+31.

1. Donner le quotient et le reste de la division de 2023+7 par 83.

   $2023 + 7 = 24 \times 83 + 31 + 7 = 24 \times 83 + 38$ et $38 < 83$ donc **Q = 24 et R = 38**

2. Donner le quotient et le reste de la division de 2023+83 par 83.

   $2023 + 83 = 24 \times 83 + 31 + 83 = 25 \times 83 + 31$ et $31 < 83$ donc **Q = 25 et R = 31**

3. Donner le quotient et le reste de la division de 2023 par 24 (attention au piège).

   $2023 = 24 \times 83 + 31 = 83 \times 24 + 24 + 7 = 84 \times 24 + 7$ et $7 < 24$ donc **Q = 84 et R = 7**

B. Multiples, diviseurs

Exercice 4.

[Cap Maths, CM2]

a)

a. Écris les nombres compris entre 20 et 70 qui sont multiples à la fois de 3 et de 5.

Les multiples de 15 compris entre 20 et 70 sont 30 ; 45 et 60.

Remarque : Les nombres qui sont multiples à la fois de 3 et de 5 sont les multiples de 15.

b. Écris les nombres compris entre 40 et 80 qui sont multiples à la fois de 2 et de 3.

Les multiples de 6 compris entre 40 et 80 sont 42 ; 48 ; 54 ; 60 ; 66 ; 72 et 78.

Remarque : Les nombres qui sont multiples à la fois de 2 et de 3 sont les multiples de 6.

b)

Complète le tableau avec vrai ou faux. Explique à chaque fois ta réponse.

	de 2	de 3	de 4	de 5
50 est multiple :	**Vrai** car 50 est un nombre pair	**Faux** car 5+0=5 et 5 n'est pas un multiple de 3	**Faux** car 50 :2=25 et 25 n'est pas divisible par 2	**Vrai** car 50 se termine par un zéro.
60 est multiple :	**Vrai** car 60 est un nombre pair	**Vrai** car 6+0=6 et 6 est un multiple de 3	**Vrai** car 60 :2=30 et 30 est divisible par 2	**Vrai** car 60 se termine par un zéro

c)

Complète ce « nombres croisés ». Trouve toutes les possibilités.

Chaque nombre s'écrit avec 2 chiffres (un par case) et ne doit pas commencer par 0.

	C	D
A	2	5
B	4	4

	C	D
A	6	5
B	4	4

	C	D
A	4	5
B	4	4

	C	D
A	8	5
B	4	4

Horizontalement :

A. multiple de 5

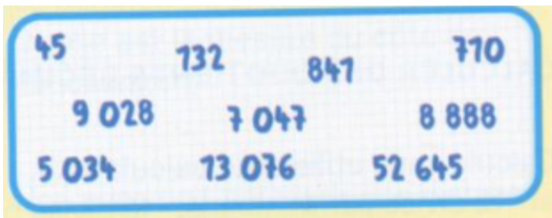
B. multiple de 2

Verticalement :

C. multiple de 4

D. multiple de 3

d)



Parmi ces nombres, trouve ceux qui sont multiples :

a. de 2 : **132 ; 710 ; 9 028 ; 8 888 ; 5 034 et 13 076**

b. de 5 : **45 ; 710 ; 52 645**

c. de 10 : **710**

e) Complète l'écriture du nombre 475• pour qu'il soit multiple : a. de 2 : **4 750 ; 4 752 ; 4 754 ; 4 756 ; 4 758** b. de 5 : **4 750 et 4 755** c. de 10 : **4 750** À chaque fois, trouve toutes les possibilités.	**f)** Encadre 58 entre deux multiples consécutifs : a. de 4 : **56 <58 < 60** c'est-à-dire $\mathbf{4 \times 14 < 58 < 4 \times 15}$ b. de 5 : **55 < 58 < 60** c'est-à-dire $5\times \mathbf{11 < 58 < 5 \times 12}$ **c.** de 7 : **56 < 58 < 63** c'est-à-dire $\mathbf{7 \times 8 < 58 < 7 \times 9}$ **d.** de 10 : **50 < 58 < 60** c'est-à-dire $\mathbf{10 \times 5 < 58 < 10 \times 6}$
g) Peut-on paver exactement un rectangle de 120 cm sur 90 cm avec des carrés tous identiques : Quand c'est possible, trouve le nombre de carrés nécessaires. a. de 10 cm de côté ? Oui, on peut paver ce rectangle avec des carrés tous identiques de 10 cm de côté car 120 et 90 sont divisibles par 10. 120 : 10 = 12 et 90 : 10 = 9 Il faudra donc $12 \times 9 = 108$ carrés b. de 15 cm de côté ? Oui, on peut paver ce rectangle avec des carrés tous identiques de 15 cm de côté car 120 et 90 sont divisibles par 15. 120 : 15 = 8 et 90 : 15 = 6 Il faudra donc $8\times 6 = 48$ carrés c. de 18 cm de côté ? Non, on ne peut pas paver ce rectangle avec des carrés tous identiques de 18 cm de côté car 120 n'est pas divisible par 18.	**h) –** Énigme – **Quels sont ces nombres ?** Nombre 1 : Je suis le plus petit nombre de 3 chiffres qui est à la fois multiple de 2, de 3 et de 5. Le nombre 1 est **120**. En effet, être à la fois un multiple de 2,3 et 5 signifie être un multiple de $2 \times 3 \times 5 = 30$ et le plus petit multiple de 30 supérieur ou égal à 100 est 120 (car $120 = 2 \times 3 \times 5 \times 4$) Nombre 2 : Je suis le plus grand nombre de 3 chiffres qui est à la fois multiple de 2, de 3 et de 5. Le nombre 2 est **990**. En effet, être à la fois un multiple de 2,3 et 5 signifie être un multiple de $2 \times 3 \times 5 = 30$ et le plus grand multiple de 30 inférieur ou égal à 999 est 990 ($car\ 990 = 2 \times 3 \times 5 \times 33$)

Point lexical : c'est la même chose de dire :

A est multiple de B	A est divisible par B	B est un diviseur de A	B divise A
21 est multiple de 7	21 est divisible par 7	7 est un diviseur de 21	7 divise 21

Exercice 5. Dire le plus de choses possibles à partir de $\mathbf{240 = 6 \times 40}$.
On pourra démontrer qu'il y a 8 assertions possibles du type ci-dessus !

240 est un multiple de 6
240 est un multiple de 40
240 est divisible par 6
240 est divisible par 40

6 est un diviseur de 240
40 est un diviseur de 240
6 divise 240
40 divise 240

Exercice 6. CRPE 2021

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. Définition : Un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple, 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a: $1+2+3+6=12$ *qui correspond au double de 6.*

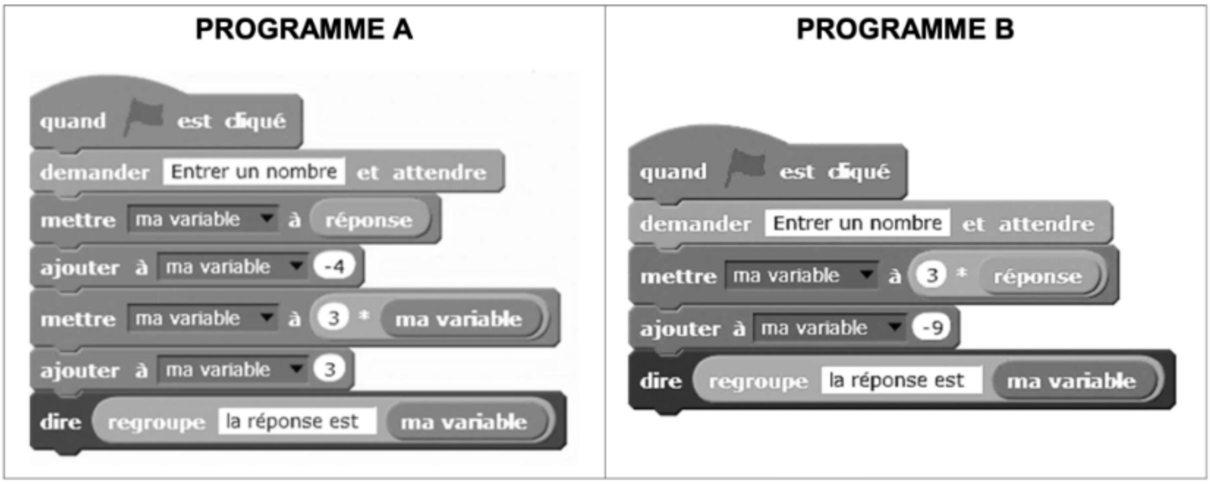
Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »

L'ensemble des diviseurs de 28 sont : $\{1\,;2\,;\ 4\,;7\,;14\,;\ 28\}$.
Et $1+2+4+7+14+28=56$
La moitié de 56 est 28. Donc l'affirmation est vraie, 28 est bien un nombre parfait.

2. **Affirmation 2** : « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »

Cette affirmation est fausse. Il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire un nombre qui est divisible par 6 et par 9, mais pas par 54. C'est le cas par exemple de 18, il est bien divisible par 6 et 9, mais pas par 54.

Exercice 7. CRPE 2021



Montrer que le résultat obtenu avec ces programmes est toujours un nombre multiple de 3.

<table>
<tr><td colspan="2">Notons x le nombre choisi.</td></tr>
<tr><td>PROGRAMME A :
Au départ, ma variable prend la valeur x.
Puis on ajoute -4, cela donne $x-4$.
Ensuite ma variable prend la valeur $3\times(x-4)$
Enfin, ma variable prend la valeur $3\times(x-4)+3$.</td><td>PROGRAMMME B :
Au départ, ma variable prend la valeur $3\times x$.
Puis on ajoute -9, cela donne $3x-9$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Or $3(x-4)+3=3x-12+3=3x-9$. Les programmes renvoient les mêmes résultats.
Et $3x-9$ s'écrit $3(x-3)$, c'est donc toujours bien un multiple de 3.</td></tr>
</table>

Exercice 8. CRPE 2021 et 2020

Affirmation 1 : « Le nombre 4700001 est un nombre premier », c'est à dire que ses seuls diviseurs sont 1 et 4700001.

<u>L'affirmation est fausse.</u> Lorsque l'on ajoute les chiffres du nombre 4700001, cela donne 4+7+1=12 qui est un multiple de 3, ce qui signifie que 4700001 est un multiple de 3. Donc ce nombre n'est pas un nombre premier, il a d'autres diviseurs que 1 et lui-même.

Affirmation 2 : « Les nombres 32^{12} et $16^{15} + 3$ sont égaux. »

L'affirmation est fausse. Le nombre 32^{12} est un nombre pair, en effet il peut s'écrire sous la forme $2 \times$ un nombre entier, $32^{12} = 32 \times 32^{11} = 2 \times 16 \times 32^{11}$.
Or, $16^{15} + 3$ est un nombre impair, en effet il peut s'écrire sous la forme $2 \times$ un nombre entier + 1,
$16^{15} + 3 = 16 \times 16^{14} + 3 = 2 \times 8 \times 16^{14} + 3 = 2 \times (8 \times 16^{14} + 1) + 1$.
Donc les deux nombres ne sont pas égaux.

Affirmation 3 : « 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

L'affirmation est fausse. Listons les diviseurs positifs de 42 : $\{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ;\ 14 ;\ 21 ;\ 42\}$. Il n'y a donc pas 7 diviseurs positifs.

Affirmation 4 : « La somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair. »

L'affirmation est vraie. Si on note n un entier naturel. L'entier naturel consécutif (qui suit) s'écrit $n + 1$.
Alors la somme des carrés de ces deux nombres s'écrit
$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1$ qui est un nombre impair, puisqu'il est de la forme $2 \times$ un nombre entier + 1.

Affirmation 5 : « La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

L'affirmation est vraie. Si on note n un entier naturel. Les entiers naturels consécutifs (qui suivent) s'écrivent $n + 1$ et $n + 2$.
Alors la somme de ces nombres s'écrit $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ qui est un multiple de 3, car il s'écrit sous la forme $3 \times$ un nombre entier.

Affirmation 6 : « La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs ne peut pas être un nombre premier. »

L'affirmation est fausse. Un nombre impair s'écrit $2n + 1$, où n est un nombre entier.
Celui d'après s'écrit $2n + 3$.
Alors la somme de ces deux nombres s'écrit $2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 4(n + 1)$ qui est un multiple de 4, cela ne donne donc pas un nombre premier.

Exercice 9. CRPE 2019

1. Pour tout nombre entier n, montrer que $30n + 25$ est divisible par 5 .
2. Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier
- Multiplier par 3
- Ajouter 5
- Élever au carré
- Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ

a. Montrer que ce programme a pour résultat 265 si le nombre entier choisi est 8. Les calculs seront détaillés.

- 8
- $8 \times 3 = 24$
- $24 + 5 = 29$
- $29^2 = 29 \times 29 = 841$
- $841 - 9 \times 8^2 = 841 - 9 \times 64 = 841 - 576 = 265$

Si le nombre choisi est 8, le résultat est 265

b. Quel résultat obtient-on si le nombre entier choisi est (-56) ?

- -56
- $-56 \times 3 = -168$
- $-168 + 5 = -163$
- $(-163)^2 = -163 \times (-163) = 26\,569$
- $26\,569 - 9 \times (-56)^2 = 26\,569 - 9 \times 3\,136 = 26\,569 - 28\,224 = -1655$

Si le nombre choisi est (- 56), le résultat est (- 1655)

c. Montrer que le résultat de ce programme de calculs, quel que soit le nombre de départ, est divisible par 5.

Soit n un nombre entier relatif

- n
- $n \times 3 = 3n$
- $3n + 5$
- $(3n + 5)^2 = (3n + 5)(3n + 5) = 9n^2 + 15n + 15n + 25 = 9n^2 + 30n + 25$
- $9n^2 + 30n + 25 - 9 \times n^2 = 30n + 25$

Or $30n + 25 = 5 \times 6n + 5 \times 5 = 5 \times (6n + 5)$
Donc si le nombre de départ est un nombre entier relatif, le résultat sera divisible par 5 car le résultat peut s'écrire sous la forme $5 \times k$ avec k un entier relatif (k = 6n+5, avec n le nombre de départ).

Exercice 10.

1. a. Soit N un nombre entier compris entre 100 et 999.
N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
Démontrer que si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4. Par exemple, pour 732, comme 32 est divisible par 4 alors 732 est divisible par 4.

Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4, alors on peut écrire

$N = a \times 100 + 4b' \times 10 + 4c' = a \times 25 \times 4 + 4b' \times 10 + 4c' = 4 \times (a \times 25 + b' \times 10 + c')$.

Donc N est divisible par 4.

b. Cette règle fonctionne-t-elle pour la divisibilité par 8, c'est à dire, « Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités d'un nombre N supérieur à 10 est divisible par 8 alors N est divisible par 8 » ?

La règle ne fonctionne pas pour 8, en effet par exemple on a 188 dont le chiffre des dizaines et des unités est un multiple de 8, mais pour autant le nombre n'est pas divisible par 8, car $188 = 8 \times 23 + 4$.

2. On considère toujours un nombre entier N compris entre 100 et 999 s'écrivant sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
   Calculer $N - (a + b + c)$. Démontrer que si $a + b + c$ est divisible par 9, alors N l'est aussi.

On a $N = a \times 100 + b \times 10 + c$, alors
$N - (a + b + c) = a \times 100 + b \times 10 + c - (a + b + c) = a \times 100 + b \times 10 + c - a - b - c$ et cela donne : $99 \times a + 9 \times b = 9 \times (11 \times a + b)$ qui est un multiple de 9.
Donc si $a + b + c$ est divisible par 9, $N - (a + b + c) + (a + b + c)$ est aussi un multiple de 9. En effet, la somme de deux multiples de 9 est un multiple de 9. Ainsi, N est divisible par 9.

Exercice 11.

CRPE 2000

Le service des espaces verts veut border un terrain rectangulaire de 924 m de long sur 728 m de large à l'aide d'arbustes régulièrement espacés. Un arbuste sera planté à chaque angle du terrain. La distance entre deux arbustes doit être mesurée par un nombre entier de mètres.

1/ Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.

On décompose les nombres en facteurs premiers : $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$ et $728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$.

La distance entre deux arbustes peut être de :
1 ; 2 ; $2 \times 2 = 4$; 7 ; $2 \times 7 = 14$; $2 \times 2 \times 7 = 28$.

2/ Déterminer dans chaque cas le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

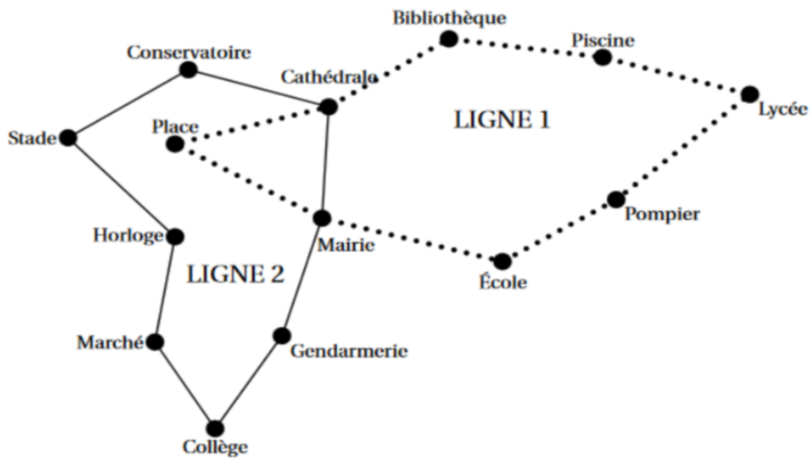
Calculons le périmètre du terrain : $2 \times 924 + 2 \times 728 = 3304$

Distance entre deux arbres :	Nombre d'arbres :
1 m	$3304 \div 1 = 3304$ arbres
2 m	$3304 \div 2 = 1652$ arbres
4 m	$3304 \div 4 = 826$ arbres
7 m	$3304 \div 7 = 472$ arbres
14 m	$3304 \div 14 = 236$ arbres
28 m	$3304 \div 28 = 118$ arbres

Exercice 12.

DNB, Polynésie, 2017

Voici le plan de deux lignes de bus :



C'est à 6 h 30 que les deux bus des lignes 1 et 2 partent de l'arrêt « Mairie » dans le sens des aiguilles d'une montre. Le bus de la ligne 1 met 3 minutes entre chaque arrêt (temps de stationnement compris), tandis que le bus de la ligne 2 met 4 minutes. Tous les deux vont effectuer le circuit complet un grand nombre de fois. Ils s'arrêteront juste après 20 h.
Est-ce que les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps ? Si oui, donner tous les horaires précis de ces rencontres.

Le bus de la ligne 1 met $8 \times 3 = 24$ minutes pour repasser à l'arrêt « Mairie ».
Le bus de la ligne 2 met $8 \times 4 = 32$ minutes pour repasser à l'arrêt « Mairie ».
De 6h30 à 20h s'écoulent 13h30, soit $13 \times 60 + 30 = 780 + 30 = 810$ minutes.
Les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps s'il existe un multiple commun à 24 et 32 inférieur ou égal à 810.
Or, $24 \times 4 = 32 \times 3 = 96$. 96 est le plus petit multiple commun à 24 et 32.
96 minutes correspondent à 1h36 minutes.
Les deux bus vont donc se retrouver toutes les 1h36 à l'arrêt « Mairie » en même temps soit à :
6h30 ; 8h06 ; 9h42 ; 11h18 ; 12h54 ; 14h30 ;16h06 ; 17h42 et 19h18

C. Résolution de problèmes : la division

Exercice 13.

On effeuille une marguerite de 40 pétales en disant : « je t'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout ; je t'aime, un peu, etc. » Par quelle déclaration terminera-t-on ?

1. Résoudre le problème.

Il y a 6 déclarations : « je t'aime », « un peu », etc…
On effectue la division euclidienne de 40 par 6 : $40 = 6 \times 6 + 4$
Le reste de cette division est 4, la 40ème déclaration (correspondant au 40ème pétale) est donc la 4ème , c'est-à-dire « passionnément ».

2. Les documents 1,2 et 3 sont constitués par les productions de six élèves de CM2, en réponse au problème ci-dessus.
a) Identifier les différents types de procédures utilisées, en précisant leurs avantages et leurs inconvénients.

Nous pouvons identifier quatre types de procédures dont trois s'appuient sur le calcul :

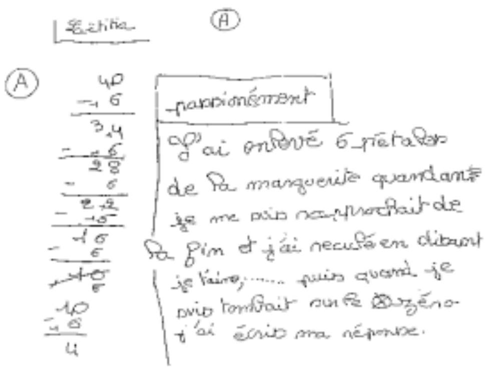
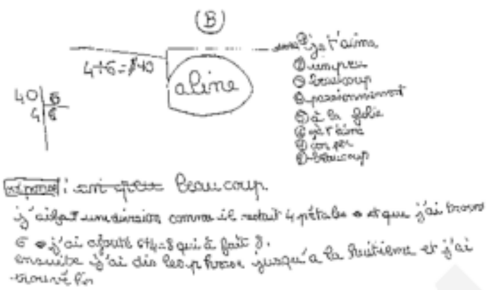
Procédure basée sur une énumération, évoquant l'action de l'effeuillage : D et F

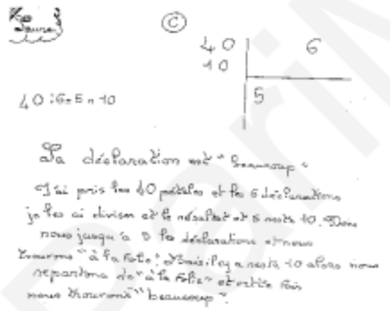
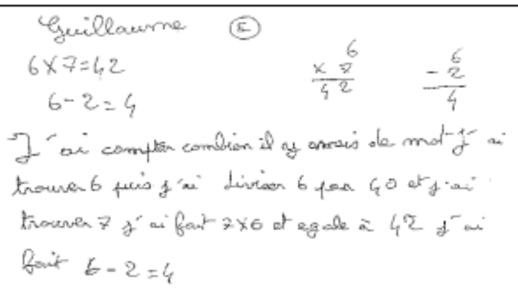
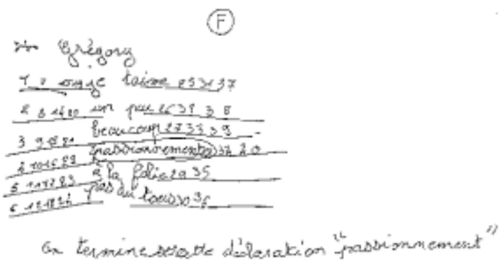
Procédure basée sur un calcul soustractif : A

Procédure basée sur un calcul multiplicatif : E

Procédure basée sur un calcul de type division euclidienne : B et C

b) Analyser chaque production (qualités, défauts, erreurs).

Elève A 	L'élève A fait des soustractions successives de 6 jusqu'au reste 4, ce qui est correct. Sa procédure, basée sur le calcul, représente les différentes étapes de l'effeuillage. Son explication pour conclure, après avoir trouvé 4, n'est pas très explicite avec l'expression «j'ai reculé ». La ritournelle récitée dans le bon sens ou à l'envers à partir de *je t'aime*, donne dans les deux cas *passionnément* ! La réponse correspond bien au moment où il ne reste plus de feuille. Avec cette petite réserve, procédure et réponse sont correctes. (l'orthographe un peu moins !)
Elève B 	L'élève B démarre par une procédure experte. Il pose la division de 40 par 6, trouve le quotient et le reste exact. Par contre il ne sait pas les interpréter. Il ajoute ces deux données et se trompe dans son calcul. Il énumère ensuite les mots possibles, en référence à son résultat, mais oublie '*pas du tout*'. Procédure correcte au départ, mais il ne sait pas lui donner du sens et en exploiter le résultat.

Elève C 	L'élève C pose la division de 40 par 6, mais se trompe dans le quotient et le reste ($r > q$). Il interprète ensuite ces résultats sans leur donner sens dans le problème : il récite la liste des mots jusqu'au cinquième, en référence au quotient 5, puis jusqu'au dixième en référence au reste 10. Si la procédure de division est correcte, il n'en maitrise ni la technique, ni le sens.
Elève D 	Enumération codée de l'effeuillage. Chaque symbole représente un mot. L'élève D mène à terme son énumération en écrivant les 40 symboles. La procédure est lourde, difficilement transposable à de grands nombres, mais correcte. La réponse est juste.
Elève E 	L'élève E, comme il le décrit, a compté les mots. Il écrit aussi avoir fait une division de 6 par 40 (au lieu de 40 par 6), mais c'est la multiplication qui est retranscrite. Il trouve le multiple de 6, juste supérieur à 40 (42), prend en compte qu'il a dépassé de 2. Son calcul $6-2=4$ fait penser à une bonne compréhension de la situation, mais il ne rédige pas la réponse. On ne peut donc pas savoir l'interprétation qu'il fait de ses calculs.
Elève F 	L'élève F énumère l'effeuillage de manière organisée. La liste des nombres jusqu'à 40, en vis-à-vis des réponses successives fait ressortir leur périodicité (6). La procédure est longue mais correcte. La réponse est juste.

c) Que proposeriez-vous pour amener les élèves A et D à utilise rune procédure experte ?

Les procédures mises en œuvre par l'élève A et l'élève sont correctes mais longues et fastidieuses (surtout pour l'élève D).
Afin de les amener à une procédure experte, on pourrait augmenter la variable didactique « nombre de pétales ».