

TD9 : GEOMETRIE ET GRANDEURS 2_CORRECTION

Partie1 : Grandeurs et mesures

Exercice 1 : Vrai ou Faux

a. Si deux figures ont le même périmètre alors elles ont la même aire.

Faux Donner, dessiner un contre-exemple.

b. 15 hg = 1500 g Vrai 1 hg = 100 g

c. 250 cm² = 2,5m² Faux 250 cm² = 0,0250 m²

d. 34 000 cm³ = 34 L Vrai car 1dm³=1L et 34 000 cm³ = 34 dm³.

e. 250 cL = 0,25 L Faux 250 cL = 2,5 L

f. 4,5 m³ = 450 L Faux : 4,5 m³ = 4 500 L

g. 33 cL = 1/3 L Faux : 1/3 ≠ 0,33 mais 1/3L ≈ 33cL

h. 50 kg = 5 quintaux Faux : 1 quintal est égal à 100 Kg

i. 45,7 m² = 4,57 ha Faux : 1ha = 1hm² = 10 000 m²

45,7 m² = 0,00457 ha

j. 45,7 m² = 45,7 a Faux : 1a = 100 m² ; 45,7 m² = 0,457 a.

Exercice 2:

Calculer le volume des solides. Les dimensions sont en cm.

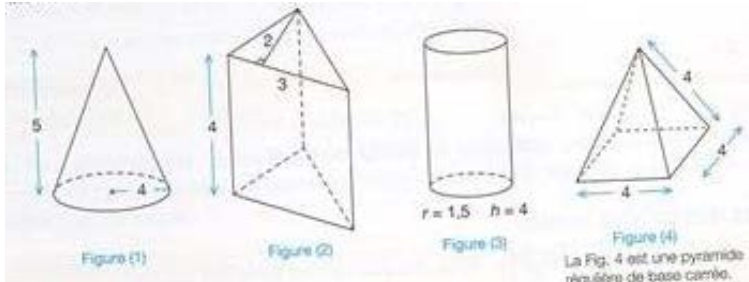


Figure 1 : Cône de révolution

$V1 = (\pi \times (4 \text{ cm})^2 \times 5 \text{ cm}) / 3 = 803 \text{ cm}^3$ Donc $V1 \approx 83,776 \text{ cm}^3$ à 1 mm^3 près.

Figure 2 : Prisme droit à base triangulaire

$V2 = (2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}) / 2 \times 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^3$.

Figure 3 : Cylindre

$V3 = \pi \times (1,5 \text{ cm})^2 \times 4 \text{ cm} = 9 \pi \text{ cm}^3 \approx 28,274 \text{ cm}^3$ à 1 mm^3 près.

Figure 4 : pyramide):

Utilisation du th. de Pythagore deux fois de suite pour trouver la hauteur SE (dans le triangle SCH puis dans le triangle SEH).

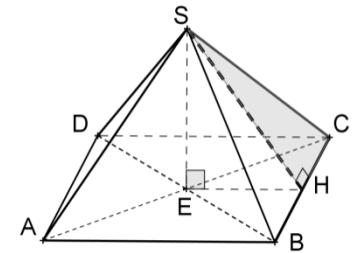
On obtient :

$$SH^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$SE^2 = SH^2 - EH^2 = 12 - 2^2 = 8^2.$$

$$V4 = ((4 \text{ cm})^2 \times \sqrt{8} \text{ cm}) / 3 \text{ cm}^3 = 32\sqrt{2} / 3 \text{ cm}^3 \approx 15,085 \text{ cm}^3 \text{ à } 1 \text{ mm}^3 \text{ près.}$$

Remarque : on peut aussi utiliser le th. de Pythagore dans le triangle SEC rectangle en E avec $EC = 4/2 = 2$; on retrouve $SE^2 = 4^2 - (2)^2 = 16 - 8 = 8$.



Exercice 3:

On verse 3L d'eau dans un cylindre droit de 20 cm de diamètre et 12 cm de hauteur. L'eau débordera-t-elle ? Sinon à quelle hauteur arrivera-t-elle ?

$$V = \pi \times (10 \text{ cm})^2 \times 12 \text{ cm} = 1200 \pi \text{ cm}^3.$$

Donc $V \approx 3770 \text{ cm}^3$ et $3 \text{ L} = 3 \text{ dm}^3 = 3000 \text{ cm}^3$.

$3770 \text{ cm}^3 > 3 \text{ L}$ donc le cylindre peut contenir 3 L.

Cherchons la hauteur quand les 3 L sont dedans :

$$V = \pi \times (10 \text{ cm})^2 \times h \text{ cm} = 3000 \text{ cm}^3 \text{ donc } h = 3000 \text{ cm}^3 / (\pi \times 100 \text{ cm}^2) \approx 9,55 \text{ cm} \text{ à } 0,1 \text{ mm près.}$$

Exercice 4:

Une piscine a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions 1, 60 m ; 5 m et 14 m. Calculer la capacité, en litres(L), de cette piscine.

$$V = 1,60 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 14 \text{ m} = 112 \text{ m}^3 = 112\,000 \text{ dm}^3 = 112\,000 \text{ litres}$$

Exercice 5: D'après Brevet 2004, Centres Étrangers

Un bassin a la forme d'un cône qui a pour base un disque de rayon 3 m et pour hauteur 6 m.

1. a) Montrer que son volume exact V' , en m^3 , est égal à 18π , en donnant l'arrondi au m^3 .
b) Ce volume représente-t-il au moins 10 000 litres ?
2. a) Combien de temps faudrait-il à une pompe débitant 15 litres par seconde pour remplir complètement ce bassin ? Donner le résultat arrondi à la seconde.
b) Cette durée est-elle inférieure à 1 heure ?

1. a) Calcul du volume du cône

Soit V le volume du cône, on a : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi$$

Conclusion : Le volume exact du cône est $18\pi \text{ cm}^3$
Le volume arrondi au cm^3 près est 57 m^3

b) $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
 $10\,000 \text{ L} = 10\,000 \text{ dm}^3$
 $10\,000 \text{ L} = 10 \text{ m}^3$

Le volume représente plus de 10 000 L.

2. a) On a : $57 \text{ m}^3 = 57\,000 \text{ L}$
 et $57\,000 : 15 = 3\,800$

Il faudra environ 3 800 secondes pour remplir le bassin.

b) Comme $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$, La durée est donc supérieure à 1 heure.

Partie 2 : Propriétés de Pythagore

Exercice 6:

- a) Pour chacun des triangles suivants, recopier et compléter la phrase suivante: "le triangleest rectangle en, son hypoténuse est..... donc d'après le théorème de Pythagore,²=.....²+.....²"

a.



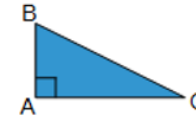
a. ABC B [AC]

b.



b. RST T [RS]

c.



c. ABC A [BC]

d. XYZ Y [XZ]

e. MNP N [MP]

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$RS^2 = RT^2 + TS^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$XZ^2 = XY^2 + YZ^2$$

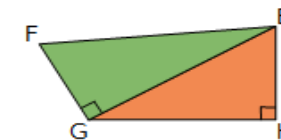
$$MP^2 = MN^2 + NP^2$$

d. XYZ tel que :
(XY) $\perp$ (YZ).

e. MNP avec :
 $\widehat{MNP} = 90^\circ$.

b)

17 Relations



En utilisant les données de la figure ci-dessus, recopie et complète les égalités suivantes :

$EF^2 = \dots^2 + \dots^2$	$FG^2 = \dots^2 - \dots^2$	$EG^2 = \dots^2 - \dots^2$
$EG^2 = \dots^2 + \dots^2$	$GH^2 = \dots$	$EH^2 = \dots$

$$EF^2 = FG^2 + EG^2$$

$$FG^2 = EF^2 - EG^2$$

$$EG^2 = EF^2 - FG^2$$

$$EG^2 = GH^2 + EH^2$$

$$GH^2 = EG^2 - EH^2$$

$$EH^2 = EG^2 - GH^2$$

Exercice 7:

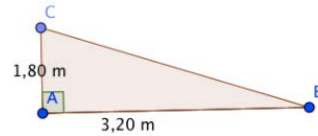
Cet arbre s'est cassé en deux morceaux lors d'une tempête.

1. Sachant que son tronc était parfaitement perpendiculaire au sol, quelle était la hauteur de l'arbre avant la tempête ?
Donner la réponse arrondie au cm près.



On modélise la situation par un triangle rectangle :

On peut alors appliquer le théorème de Pythagore dans triangle ABC rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3,2^2 + 1,8^2 = 13,48$
Donc : $BC = \sqrt{13,48} \text{ m} \cong 3,6715 \text{ m} \cong 3,67$.



2. ABC est un triangle rectangle en A, tel que $AB = 5$ et $BC = 7$. Calculer AC.

On peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A : on obtient l'égalité : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ soit $7^2 = AC^2 + 5^2$
Et $AC^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$, ainsi $AC = \sqrt{24} \cong 4,9 \text{ m}$.

Exercice 8:

Jouer au professeur :

Voici l'énoncé d'un problème :

ABC est un triangle tel que $BC = 25 \text{ cm}$; $AB = 24 \text{ cm}$ et $AC = 7 \text{ cm}$.

Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Quentin a rédigé sur sa copie le texte :

Je sais que dans le triangle ABC, [BC] est le plus long côté donc :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $25^2 = 24^2 + 7^2$
 $625 = 576 + 49$
 $625 = 625$
Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est bien rectangle en A.

- Explique pourquoi le raisonnement de Quentin est faux.
Egalité énoncée comme vraie sans avoir effectués en amont les calculs.
L'égalité est vraie si on sait d'après la consigne que le triangle est rectangle, ce qui n'est pas le cas.
- Recopie la démonstration de Quentin en la corrigeant.
Dans le triangle ABC, le plus long côté est [BC]
D'une part: $BC^2 = 25^2 = 625$

D'autre part: $AB^2 + AC^2 = 24^2 + 7^2 = 625$

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ABC est rectangle en A

Comparaison de rédaction

Voici ce que l'on peut voir sur une copie :

$$\begin{array}{l|l} \ll AB^2 = 3,64^2 & AC^2 + BC^2 = 0,27^2 + 3,65^2 \\ AB^2 = 13,2496 & AC^2 + BC^2 = 0,0729 + 13,3225 \\ & AC^2 + BC^2 = 13,3954 \end{array}$$

Donc $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$. D'après le théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle. »

Est-ce juste ? Justifie ta réponse et corrige cette copie le cas échéant.

Procédure utilisée correcte mais erreur de rédaction : le plus long côté n'est pas [AB] mais [BC]

Exercice 9:

On donne les longueurs des côtés des triangles GHI et JKL.

- GH = 4,8 cm ; HI = 7,3 cm et IG = 5,5 cm
- JK = 8,8 cm ; JL = 3,8 cm et KL = 8 cm.

Yanis : « Ces deux triangles sont rectangles ! »
Maïlys : « L'un est rectangle, l'autre non ! »
Jean : « Mais non, aucun des deux n'est rectangle... »

Qui a raison ? Justifier.

Le plus long côté de GHI est [HI].

Calculons : $HI^2 = 53,29$ et $GH^2 + GI^2 = 53,29$. On constate que $GH^2 + GI^2 = HI^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle GHI est rectangle en G.

Le plus long côté de JKL est [JK].

Calculons : $JK^2 = 77,44$ et $LJ^2 + LK^2 = 78,44$. On constate que $LJ^2 + LK^2 \neq JK^2$
Si JKL était rectangle, on obtiendrait une contradiction avec le théorème de Pythagore. JKL n'est donc pas un triangle rectangle.

Maïlys a raison.

Exercice 10: (Groupement 5, 2010)

Un triangle ABC a pour dimensions (exprimées dans la même unité u) :

$$AB = 2469 \text{ u} ; \quad AC = 3\,047\,980 \text{ u} ; \quad BC = 3\,047\,981 \text{ u}.$$

Le triangle ABC est-il rectangle ?

L'écran de la calculatrice s'avère trop petit pour accueillir les carrés des nombres en jeu.

Une astuce consiste à calculer directement la différence des deux carrés des plus grands côtés, à l'aide d'une identité remarquable ($a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$)

Le plus long côté de ABC est [BC].

$$\text{Calculons : } BC^2 - AC^2 = (BC - AC)(BC + AC) = 1 \times 6\,095\,961 = 6\,095\,961$$

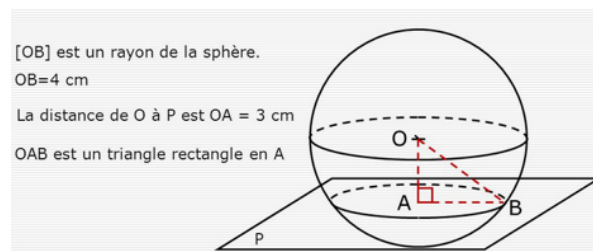
$$\text{Et } AB^2 = 6\,095\,961$$

On constate que $BC^2 - AC^2 = AB^2$ ce qui équivaut à : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A

Exercice 11:

On sectionne une sphère de 4cm de rayon suivant un plan distant de 3 cm du centre de la sphère. Déterminer le rayon r de la section.



On peut appliquer le théorème de Pythagore dans triangle ABO rectangle en A :

$$BO^2 = AB^2 + AO^2$$

$$AB^2 = BO^2 - AO^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\text{Donc : } AB = \sqrt{7} \text{ m} \cong 2,6 \text{ cm au mm près}$$

Exercice 12:



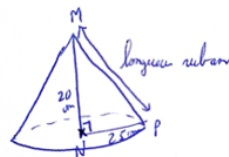
Martine achète un chapeau de forme conique de diamètre 50 cm et de hauteur 20 cm. Elle veut le décorer en collant des rubans colorés. Chaque ruban forme un segment allant du sommet du cône au bord du chapeau (voir dessin).

Le ruban se vend par rouleau de 1 m.

Combien doit-elle acheter de rouleaux si elle veut pouvoir décorer son chapeau avec au moins 12 rubans.

Modélisation du problème :

Rayon de la base = Diamètre de la base / 2 = 25 cm



On peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle MNP rectangle en N :

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 \text{ soit } MP^2 = 20^2 + 25^2$$

$$MP^2 = 400 + 625 = 1\,025$$

$$\text{ainsi } MP = \sqrt{1025} \text{ cm}$$

$$12 \times \sqrt{1025} \text{ cm} \cong 384 \text{ cm (au cm près)}$$

Il faut prévoir 384 cm de ruban au cm près.

1 m = 100 cm. Il faut donc prévoir 4 rouleaux.

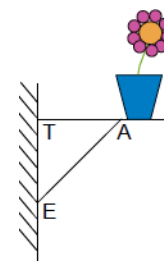
Exercice 13: Fleurs sur une étagère

Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser un pot de fleurs.

Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes :

AT = 42 cm ; AE = 58 cm et TE = 40 cm.

L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifier.



Dans le triangle ETA, le plus long coté est [AE].

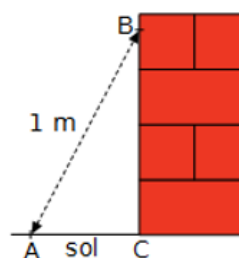
$$\text{D'une part : } AE^2 = 58^2 = 3\,364$$

$$\text{D'autre part : } AT^2 + TE^2 = 42^2 + 40^2 = 3\,364$$

On constate que $AE^2 = AT^2 + TE^2$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ETA est rectangle en T.

L'étagère d'Arnaud est donc bien horizontale.

Exercice 14: Construction d'un mur.



Pour apprendre son métier, un apprenti maçon a monté un mur de briques de 0,90 m de hauteur. Son patron arrive pour vérifier son travail: il marque un point B sur le mur à 80cm du sol et un point A à 60 cm du pied du mur. Il mesure alors la distance entre les points A et B et il obtient 1m.

L'apprenti a til bien construit son mur perpendiculaire au sol ? Justifier.

Dans le triangle ABC, le plus long cote est [AB].

$AB = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$.

D'une part : $AB^2 = 100^2 = 10\,000$ D'autre part : $AC^2 + BC^2 = 60^2 + 80^2 = 10\,000$

On constate que $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

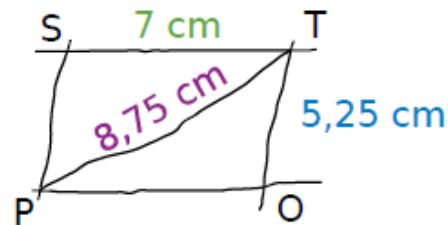
L'apprenti a donc bien construit son mur perpendiculaire au sol.

Exercice 15: Du parallélogramme au rectangle

On considère le parallélogramme STOP

ci-contre dessiné a main levée.

Démontrer que le parallélogramme STOP est un rectangle.



Comme le quadrilatère STOP est un parallélogramme, alors ses cotes opposes sont deux a deux de même longueur, et donc $SP = TO = 5,25 \text{ cm}$.

Dans le triangle STP, le plus long coté est [TP].

D'une part : $TP^2 = 8,75^2 = 76,5625$ et d'autre part :

$SP^2 + ST^2 = 5,25^2 + 7^2 = 76,5625$

On constate que $TP^2 = SP^2 + ST^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle STP est rectangle en S.

Comme le parallélogramme STOP a un angle droit, alors c'est un rectangle.

Exercice 16 Du parallélogramme au losange

LOSA est un parallélogramme tel que : $LO = 58 \text{ mm}$; $LS = 80 \text{ mm}$ et $OA = 84 \text{ mm}$.

Démontrer que LOSA est un losange

Notons C le centre du parallélogramme LOSA,

Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu alors C est le milieu de [OA] et de [LS], donc $CO = 42 \text{ mm}$ et $LC = 40 \text{ mm}$.

Pour prouver que le parallélogramme LOSA est un losange, il suffit de prouver que ses diagonales sont perpendiculaires, autrement dit que le triangle LOC est rectangle en C.

Dans le triangle LOC, le plus long coté est [LO].

D'une part : $LO^2 = 58^2 = 3\,364$ et d'autre part : $LC^2 + CO^2 = 40^2 + 42^2 = 3\,364$

On constate que $LO^2 = LC^2 + CO^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle LOC est rectangle en C.

On conclut donc que le parallélogramme LOSA est un losange.

Exercice 17: Longueur de câble

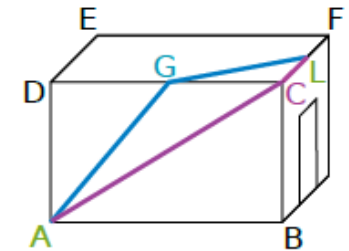
Une pièce d'une maison a la forme d'un pave droit dont les dimensions sont :

$AB = 5 \text{ m}$; $BC = 2,5 \text{ m}$ et $DE = 4 \text{ m}$.

Un bricoleur doit amener un câble du point A au point L, milieu de [CF]. Il hésite entre les deux possibilités marquées en couleur sur la figure, sachant que G est le milieu de [DC] :

en bleu, de A vers G puis de G vers L ;

en violet, de A vers C puis de C vers L.



a. Dans lequel des deux cas utilisera-t-il le moins de câble ? Justifie.

b. Construis sur une même figure, a l'échelle 1/100, les faces ABCD et CDEF. Représente les deux possibilités pour le passage du câble.

c. Le bricoleur veut utiliser le moins de câble possible. Sur la figure précédente, représente le passage du câble de longueur minimum. Justifie ton tracé et calcule cette longueur.

Comme ABC est rectangle en B, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + CB^2$$

$$AC^2 = 5^2 + 2,5^2$$

$$AC^2 = 25 + 6,25 = 31,25$$

$$AC = \sqrt{31,25} \approx 5,6 \text{ m}$$

Longueur du chemin violet : $\sqrt{31,25} + 2 \approx 7,6 \text{ m}$

Comme ADG est rectangle en D, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$AG^2 = AD^2 + DG^2$$

$$AG^2 = 2,5^2 + 2,5^2$$

$$AG^2 = 6,25 + 6,25 = 12,5$$

$$AG = \sqrt{12,5} \approx 3,5 \text{ m}$$

Comme DFC est rectangle en C, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DC^2 + CF^2$$

$$DF^2 = 5^2 + 4^2$$

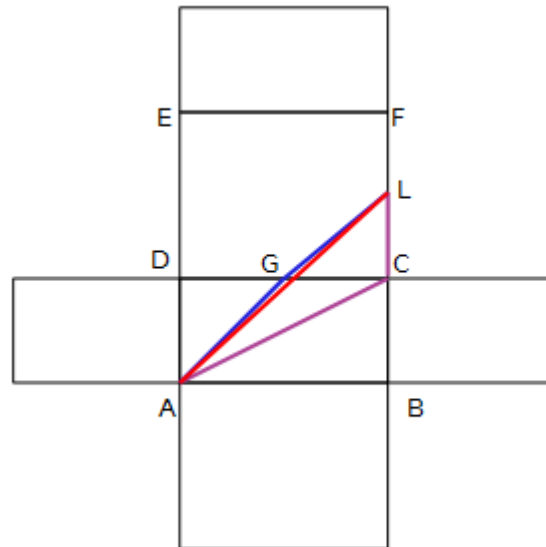
$$DF^2 = 25 + 16 = 41$$

$$DF = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ m}$$

En appliquant le théorème des milieux dans le triangle DFC, on obtient : $GL = DF/2 \approx 3,2 \text{ m}$

Longueur du chemin bleu : $AG + GL \approx 6,7 \text{ m}$

Il faudra donc moins de câble pour le chemin bleu.



On a représenté en rouge le chemin le plus court qui est la ligne droite.

Comme ABL est rectangle en L, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$AL^2 = AB^2 + BL^2$$

$$AL^2 = 5^2 + 4,5^2$$

$$AL^2 = 25 + 20,25 = 45,25$$

$$AL = \sqrt{45,25} \approx 6,7 \text{ m}$$

(en arrondissant plus finement, on voit que AL est légèrement inférieure à la longueur du chemin bleu)

$$\text{En effet : } AL = \sqrt{45,25} \approx 6,727$$

$$\text{Alors que : } AG + GL = \sqrt{12,5} + \sqrt{41} \div 2 \approx 6,737$$