

TD 7 – CORRECTION

Partie B

Exercice 7 : Martinique 2004

1. Recopier sur votre copie les égalités vraies. $\frac{1}{20} = 0,5$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{3} = 0,33$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$; $\sqrt{2} = 1,414$; $\pi = 3,14$

Égalités vraies : $\frac{1}{5} = 0,2$ car $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$ et $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ car $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$.

En effet : $\frac{1}{20} \neq 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{10}{20}$; $\frac{1}{3} \approx 0,33 \neq 0,33 = \frac{33}{100}$; $\sqrt{2} \approx 1,414 = \frac{1414}{1000}$ et $\pi \approx 3,14 = \frac{314}{100}$.

2. Ranger dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants : 1,7 ; 1,07 ; 1,109 ; 1,81.

Les parties entières sont égales, il suffit ici de comparer les chiffres des dixièmes :

1,07 < 1,109 < 1,7 < 1,81.

3. Donner deux nombres décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,12.

Par exemple : $1,102 < 1,1025 < 1,11 < 1,12$

4. Donner en heures, minutes et secondes les durées suivantes exprimées en heures dans le système décimal :

1,5 ; 2,25 ; 0,3 ; 3,375.

$1,5 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$; $2,25 \text{ h} = 2 \text{ h} + 0,25 \text{ h} = 2 \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h} = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$; $0,3 \text{ h} = 0,3 \times 60 \text{ min} = 18 \text{ min}$

$3,375 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,375 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,375 \times 60 \text{ min} = 3 \text{ h } 22,5 \text{ min} = 3 \text{ h } 22 \text{ min } 30 \text{ s}.$

5. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible : $A = \frac{5}{8} + 0,25$; $B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + 0,15$.

$A = \frac{5}{8} + 0,25 = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ et $B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + 0,15 = \frac{4}{20} + \frac{35}{20} + \frac{15}{100} = \frac{39}{20} + \frac{3}{20} = \frac{42}{20} = \frac{21}{10}$

Exercice 8 :

Voici quelques erreurs régulièrement repérées chez les élèves.

Pour chacun des items ci-dessous, donner une explication quant à l'origine possible de l'erreur.

- $2,7 + 3,5 = 5,12$ le nombre décimal est considéré comme juxtaposition de deux nombres entiers indépendants l'un de l'autre
- $6,34 < 6,251$ les nombres ont été comparés sans tenir compte de la virgule $634 < 6\ 251$ ou seules les parties à droite de la virgule sont comparées (transposition procédures nombres entiers aux nombres décimaux)
- $52,14 \times 10 = 520,140$ la partie entière et la partie décimale ont été multipliées par 10. Mauvaise application de la règle « multiplier un nombre entier par 10 revient à ajouter un zéro ! ».
- Voici un morceau de droite graduée



Écris les fractions correspondant aux points de la droite. Pour l'abscisse de C un élève propose $\frac{46}{10}$.

Attention : La droite ne commence pas par 0. La graduation 3 et la position de la fraction $\frac{35}{10}$ nous permet de déduire qu'une grande graduation correspond à $\frac{1}{10}$ et une petite à $\frac{1}{100}$. A a pour abscisse $\frac{32}{10}$; B a pour abscisse $\frac{35}{10}$ et C a pour abscisse $\frac{36}{10}$.

L'élève C pense que chaque graduation correspond à un dixième.

Exercice 9 : D'après CRPE Créteil 2001

Un maître propose l'exercice suivant à sa classe de CM 2 :

Range les nombres du plus petit au plus grand. 2 ; 2,02 ; 22,2 ; 22,02 ; 20,02 ; 0,22

..... < < < < <

Les productions de cinq élèves figurent ci-dessous.

Arnaud : 22,20 < 22,02 < 20,02 < 2,02 < 2 < 0,22

Karine : 0,22 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2 < 2

Chedlia : 0,22 < 2 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2

Sandrine : 0,22 < 2 < 2,02 < 20,02 < 22,2 < 22,02

Mehdi : 2 < 0,22 < 2,02 < 22,2 < 20,02 < 22,02

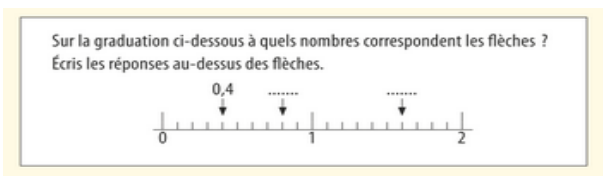
Pour les enfants ayant commis des erreurs, repérer et expliquer d'une phrase précise et simple d'où vous semblent provenir ces erreurs.

Le rangement correct est $0,22 < 2 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2$.

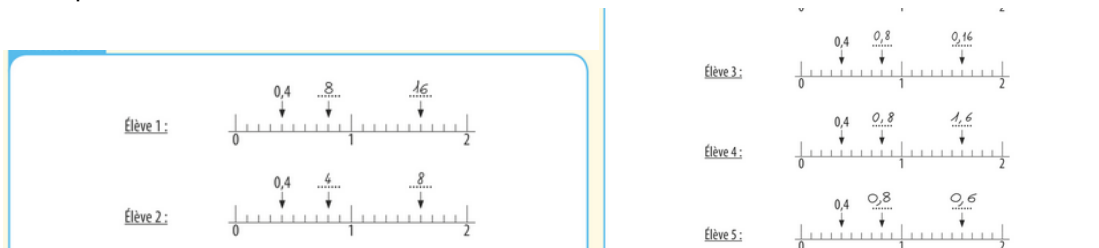
- Arnaud a mal utilisé les signes « inférieur à » qu'il confond avec les signes « supérieur à ». Il classe les nombres du plus grand au plus petit alors que c'est l'inverse qui est demandé (cependant son classement est juste).
- Karine : le rangement des 5 premiers nombres est correct, seul le rangement de 2 n'est pas satisfaisant. On peut penser que pour cette élève, les nombres décimaux sont nécessairement plus petits que les nombres entiers, d'où le fait que 2 soit mal placé.
- Chedlia donne la réponse attendue.
- Sandrine classe correctement les 4 premiers nombres mais elle inverse les 2 derniers. Elle semble ranger les décimaux par rapport à leur partie entière, cela lui permet de ranger correctement le début la liste. Cependant, pour les 2 derniers qui ont la même partie entière, elle semble utiliser un critère propre aux nombres entiers : le plus grand est celui qui a le plus de chiffres.
- Medhi semble avoir fait totalement abstraction de la virgule et a rangé les nombres comme des nombres entiers.

Exercice 10 :

On considère l'exercice suivant extrait d'une évaluation à l'entrée en sixième.



Les réponses de 5 élèves sont fournies.



1. Quels élèves n'ont fait aucune erreur ? **Élève 4**
2. Pour ceux ayant fait une erreur, précisez cette erreur, expliquer d'où elle peut provenir par une phrase simple.
Élève 1 : Comptage des graduations à partir de 0
Élève 2 : Comptage entier des graduations à partir de la précédente : 4 graduations après 0,4 puis 8 graduations après le 4
Élève 3 : Première valeur correcte, seconde erronée mauvaise conversion de $16/10 = 1,6$
Élève 5 : Première graduation correcte, puis comptage de 6 dixièmes à partir de 1 pour la seconde réponse.

Exercice 11 : Extrait du CRPE 2015 groupement 1

SITUATION 1

Extrait du manuel « Outils pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011)



1- Un élève a bien réussi la question 2 mais a fait plusieurs erreurs à la question 3.

En comparant la présentation et les tâches demandées dans ces deux questions, donner trois raisons pouvant expliquer cette différence de réussite.

Comparaison des informations données sur les supports

Dans l'exercice 2, une demi-droite graduée en dixièmes et centièmes est donnée sur papier blanc. Le nombre 0 est associé à l'origine de la demi-droite, et les nombres 0 et 1 sont les seules abscisses écrites.

L'unité est donc clairement visible.

Dans l'exercice 3, une droite graduée en dixièmes est donnée sur papier millimétré. Le papier millimétré permet de graduer la droite en centièmes, mais les graduations ne sont pas explicitement marquées. De plus, seules les abscisses 3 et 4 sont données sur la droite, et c'est à partir de cette seule donnée qu'il faut inférer l'amplitude des intervalles correspondant respectivement à une unité, un dixième, et un centième (d'autant que 0 et 1 ne peuvent pas être placés sur le support proposé).

Enfin, pour chacun des entiers 3 et 4, une autre désignation sous forme de fraction décimale est donnée, ce qui suggère qu'une même graduation peut être codée par différentes désignations.

Comparaison des tâches prescrites aux élèves

Dans l'exercice 2, les élèves doivent associer des écritures fractionnaires à des repères marqués par une lettre, tandis que dans l'exercice 3, les élèves doivent reproduire le support sur papier millimétré (ils peuvent donc ensuite travailler avec un support erroné), puis déterminer l'emplacement de points dont les abscisses sont données par différentes écritures.

Comparaison des procédures à mettre en œuvre

- Dans l'exercice 2, cinq nombres écrits en fractions décimales, sont à placer, et il y a exactement cinq repères sur la droite graduée. Les emplacements des nombres sont indiqués par des flèches. La procédure qui consiste à ranger les fractions données par ordre croissant, permet ensuite d'associer cette liste ordonnée aux lettres ordonnées pour répondre correctement à l'exercice. Or comme toutes les écritures fractionnaires ont le même dénominateur 100, il suffit de ranger les numérateurs, donc des nombres entiers, par ordre croissant, pour ranger les fractions et ensuite placer correctement les fractions sur la droite.

Pour ce même exercice, l'unité est subdivisée en centièmes de manière explicite, alors que toutes les fractions demandées sont exprimées en centièmes, et 0 est placé sur le segment. Une autre procédure est donc possible : à partir du moment où l'on sait ce qu'est le centième d'une unité, il suffit de compter les « petits intervalles » (de 1 en 1 ou de 10 en 10) pour placer correctement les nombres.

- Dans l'exercice 3, en revanche, il faut placer correctement les huit nombres sur la droite, sans indication *a priori* sur leurs emplacements. En particulier, les ranger par ordre croissant ne suffit pas pour résoudre l'exercice. On peut cependant remarquer que pour les deux premiers nombres à placer, les écritures proposées sont d'autres désignations de nombres déjà placés : elles peuvent constituer de nouveaux repères pour placer les six nombres suivants. Par ailleurs, différentes écritures cohabitent : fractions décimales dont les dénominateurs sont 10 ou 100, écritures à virgule. Pour réussir l'exercice, des conversions entre certaines de ces écritures sont nécessaires.

2- Quelle définition d'un nombre décimal peut-on proposer à l'école élémentaire ?

À l'école primaire, les nombres décimaux sont introduits après avoir rencontré des cas particuliers de fractions : les fractions décimales.

On pourrait donc les définir comme des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale (c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000...) ou sous la forme d'une somme d'un entier et de fractions décimales.

Néanmoins, on peut penser qu'à l'école, il n'est pas nécessaire de donner une définition formelle d'un nombre décimal, mais que l'on peut se contenter de définitions fonctionnelles, à partir d'exemples génériques.

Par exemple : $\frac{5}{10}$; $\frac{5}{10} + \frac{3}{100}$; $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{5}{10}$; 4 sont des nombres décimaux.

SITUATION 2

Extrait du manuel scolaire « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010)

Trois copies d'élèves sont proposées ci-après (Lara, Clément et Léonie).

1. Quelles sont les erreurs faites par Lara ? Indiquer pour chacune une origine possible.

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = 2,52 = \frac{252}{100}$
 $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = 2,61 = \frac{261}{100}$
 Max a tort car 2,52 est plus petit que 2,61.
 Fatou a raison.

2 types d'erreurs :

- Elle se trompe dans la conversion des décompositions additives canoniques en une seule fraction : dénominateur égal à 1000 au lieu de 100 et elle a peut-être juxtaposé les chiffres 2, 5 et 2 pour former le numérateur ;
- Après avoir converti correctement les fractions décimales en écritures à virgule, elle se trompe quand elle écrit « $0,252 = 252$ » et « $0,261 = 261$ ».

2. Citer une compétence qui semble acquise dans le domaine de la numération pour Clément.

Clément
 $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = 2,52$ $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = 2,61$
 $2,52 - 2,61 = \text{IMPOSSIBLE}$
 Fatou a tort parce que nous ne pouvons pas le calculer.

Clément semble savoir passer de la décomposition additive canonique d'un nombre (en unités, dixièmes, centièmes) à l'écriture à virgule de ce nombre (il le fait en tout cas correctement pour les nombres 2,52 et 2,61 : il associe convenablement chaque fraction décimale de la décomposition au rang du chiffre associé dans l'écriture à virgule).

3. Léonie s'appuie sur les écritures décimales des nombres $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$ pour comparer ces nombres. Énoncer la règle de comparaison qu'elle utilise implicitement.

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = 2,52$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = 2,61$ donnée
 $= 2,52$ $= 2,61$
 Fatou dit que le segment qu'il a fait est entre 2,52 et 2,61.
 C'est Max qui a tort car $\frac{1}{100} = 0,01$ et $\frac{2}{100} = 0,02$ mais
 le chiffre d'avant pour $\frac{2}{100}$ est 2, 2 est pour $\frac{1}{100}$ c'est 2,61
 c'est le chiffre des dixièmes
 qui a permis à Fatou d'être
 que Max a comparé au
 chiffres des centièmes.

Léonie convertit les décompositions en écritures fractionnaires en écritures à virgule pour effectuer la comparaison des deux nombres. Elle veut comparer les chiffres des dixièmes des deux nombres (tout en étant consciente que le chiffre des centièmes de 2,52 est plus grand que celui de 2,61).

Elle utilise le procédé suivant :

2,61 et 2,52 ont la même partie entière, donc pour les comparer, on compare leurs parties décimales 0,61 et 0,52.

Pour cela, on compare les chiffres des dixièmes : 6 est plus grand que 5, donc 2,61 est plus grand que 2,52.

Si les deux nombres proposés avaient eu le même chiffre des dixièmes, Léonie aurait comparé les chiffres des centièmes, etc., autrement dit en considérant les chiffres des différents rangs de gauche à droite.

Exercice 12 : On considère l'exercice suivant proposé à des élèves de CM2 :

Lis attentivement la petite devinette suivante :

« Je suis un nombre décimal et mon écriture ne contient que trois chiffres.

Mon chiffre des unités est 2. Mon chiffre des dixièmes est le même que le chiffre des centièmes du nombre 135,798. Mon chiffre des dizaines est le double de mon chiffre des unités. Qui suis-je ? »

1. Résoudre la devinette.

On cherche un nombre à trois chiffres : D U, d composée d'unités, de dizaines et de dixièmes.
On sait que le chiffre des unités U du nombre décimal cherché est égal à 2.

Le chiffre des dixièmes d (à droite du chiffre des unités) est **9** (chiffre des centièmes de 135,7**98**).

Le chiffre des dizaines D (à gauche des unités) est le double de 2, il est donc égal à **4**.

Le nombre ne contenant que trois chiffres, **on peut en conclure le nombre cherché est 42,9**.

2. Quelle est la compétence évaluée dans cet exercice ?

L'élève doit connaître les règles de fonctionnement de notre système décimal, en particulier la valeur du chiffre en fonction de son rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal.

C'est l'aspect positionnel de notre système de numération qui est évalué.

3. Analyser les réponses des trois élèves ci-dessous en précisant ce qui est juste et ce qui est erroné.

Élève A : 429 ; Élève B : 92,4 ; Élève C : 42,1

Élève	Ce qui est juste	Ce qui est erroné
A	Il a trouvé dans l'ordre les trois chiffres du nombre cherché.	Oubli de placer la virgule entre le chiffre 2 et le chiffre 9.
B	Il a trouvé dans le désordre les chiffres du nombre cherché ; - son chiffre des unités est correct ; - il reconnaît 9 comme étant le chiffre des centièmes dans le nombre 135,798 ; - il sait ce qu'est un double. - il sait qu'après le chiffre des unités il y a une virgule.	Confusion entre chiffre des dizaines et chiffre des dixièmes lorsqu'il positionne le chiffre 9 et le 4. La confusion entre les mots dixième et dizaine.
C	- Son chiffre des unités est correctement placé ; - il sait ce qu'est un double ; - il sait qu'après le chiffre des unités il y a une virgule.	Confusion entre le chiffre des centièmes et le chiffre des centaines du nombre 135,798. Là encore, la confusion entre les mots centième et centaine