TD2 dénombrement- Eléments de correction

Exercice 1 :

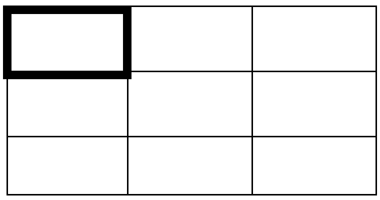
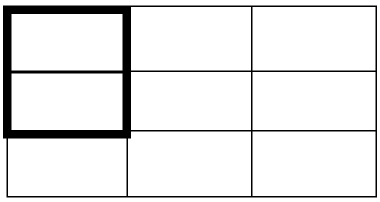
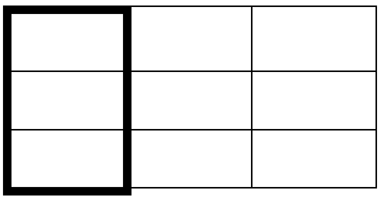
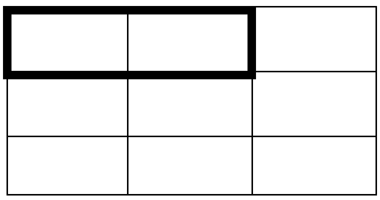
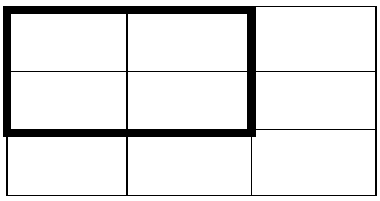
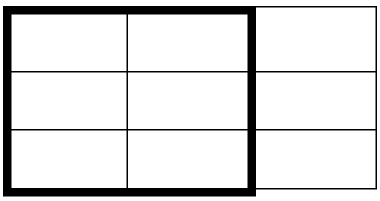
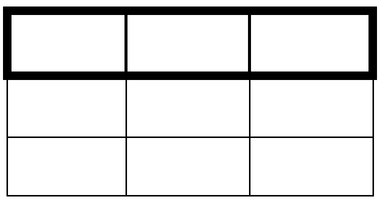
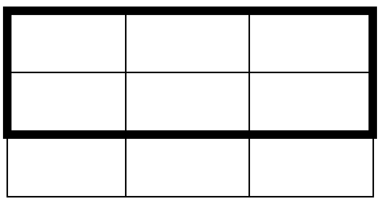
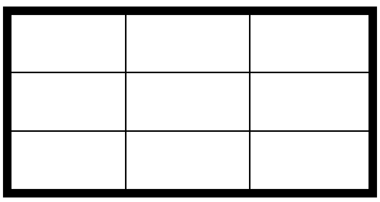
125 paquets de lapins en chocolats contiennent chacun 20 lapins. Ces lapins sont creux et contiennent chacun 5 petits œufs en chocolat. Combien d'œufs contiennent ces 125 paquets ?

Il y a 125 paquets, qui contiennent chacun 20 lapins.
Il y a donc 125 x 20 = 2 500 lapins.
Chaque lapin contient 5 petits œufs en chocolat.
Il y a donc 2500 x 5 = **12 500 petits œufs au chocolat**

Exercice 2 :

a) *La figure ci-contre est composée de petits rectangles. Combien en voit-on ?*
b) **Si on assemble ces rectangles, on peut en constituer de plus grands. Combien peut-on en construire ainsi ?*

On organise la recherche selon le « type » de rectangles (en fonction de la longueur et de la largeur)

Premier type de rectangles :  On peut voir 9 rectangles de ce type.	Deuxième type de rectangles :  On peut voir 6 rectangles de ce type.	Troisième type de rectangles :  On peut voir 3 rectangles de ce type.
Quatrième type de rectangles :  On peut voir 6 rectangles de ce type.	Cinquième type de rectangles :  On peut voir 4 rectangles de ce type.	Sixième type de rectangles :  On peut voir 2 rectangles de ce type.
 On peut voir 3 rectangles de ce type.	 On peut voir 2 rectangles de ce type.	 On peut voir 1 rectangle de ce type.

Au total, il y a donc **36 rectangles**.

Exercice 3 :

Combien faut-il de chiffres pour numéroter les pages 1 à 100 d'un livre ?

Pour chacune des pages de 1 à 9, il faut 1 chiffre, soit au total 9 chiffres.

Pour chacune des pages de 10 à 99 (soit 90 pages), il faut 2 chiffres, soit un total de 180 chiffres.

Pour la page 100 on a besoin de trois chiffres.

Au total, il faut donc **192 chiffres**.

Exercice 4 :

Dans un centre de vacances accueillant cent vingt personnes, on sait que vingt-quatre personnes font du tennis et quinze du canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports, sachant qu'aucune personne ne pratique les deux sports ?

84 + 15 = 99

Il y a donc 99 personnes qui font du tennis ou du canoé.

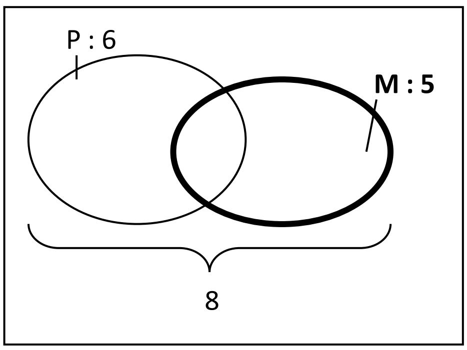
Comme personne ne pratique ces deux sports, il y a 120 – 99 = **21 personnes ne pratiquent aucun de ces deux sports.**

(on peut visualiser avec un diagramme de Venn ayant deux ensembles disjoints)

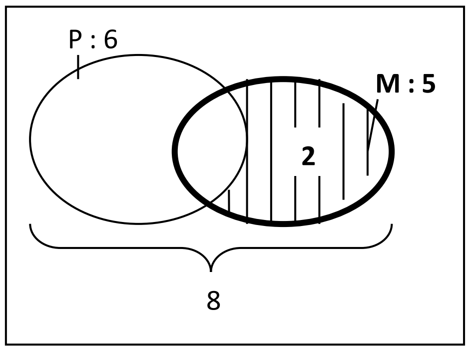
Exercice 5 :

Quand Marie et Pierre se sont mariés, chacun d'eux avait déjà plusieurs enfants de mariages précédents. Au bout de quelques années, il y a huit enfants dans leur maison : Pierre est le père de six d'entre eux, Marie est la mère de cinq d'entre eux. Combien d'enfants ont-ils eu ensemble ?

On représente la situation par un diagramme « en patates » (on aurait aussi pu faire un tableau à double entrée) :



Pierre est le père de 6 enfants : parmi les 8 enfants, il y a donc 2 enfants dont le père n'est pas Pierre.



Ces 2 enfants font partie des 5 enfants de Marie ; les 3 autres enfants de Marie ont donc Pierre comme père.

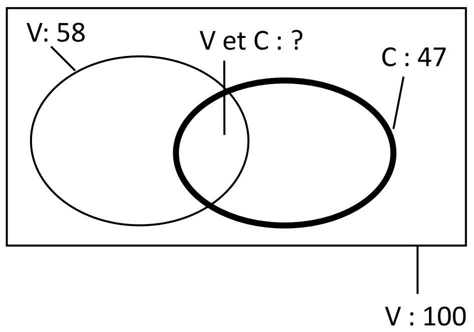
Pierre et Marie ont donc eu 3 enfants ensemble.

Exercice 6 :

Une boite contient 100 jetons : des verts et des carrés. Il y a 58 jetons verts et 47 jetons carrés. 12 jetons ne sont ni verts, ni carrés. Combien y a-t-il de jetons verts et carrés ?

Deux organisations possibles des données :

- *Diagramme de Venn (ou « en patates »)*



Le nombre de jetons verts OU carré (ou les deux) est égal à 58 + 47 = 105.

12 jetons ne sont ni verts ni carrés donc il y a

100 – 12 = 88 jetons qui sont verts ou carrés

105 – 88 = 17 : il y a donc 17 jetons qui ont été comptés deux fois.

Il y a donc 17 jetons qui sont verts et carrés.

- *Tableau à double entrée :*

	Vert	Pas vert	Total
Carré	?		47
Pas carré		12	
Total	58		100

	Vert	Pas vert	Total
Carré	47-30=**17**	47-12=30	47
Pas carré		12	
Total	58	100-58=42	100

Il y a donc 17 jetons verts et carrés

Exercice 7 :

Combien de tenues peut-on faire avec 3 pantalons et 2 pulls ?
Et si on ajoute 4 chapeaux ?

On peut décrire la situation à l'aide d'un arbre :

Lorsqu'on a trois pantalons et deux pulls, on peut créer

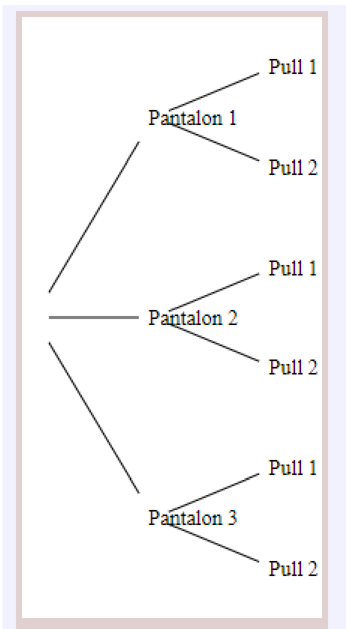
6 tenues différentes

Remarque : le fait que les mots pantalon et pull commencent
Par la même lettre peut créer une difficulté,
notamment pour lister toutes les tenues

B : pantalon (bas)

H : pull (haut)

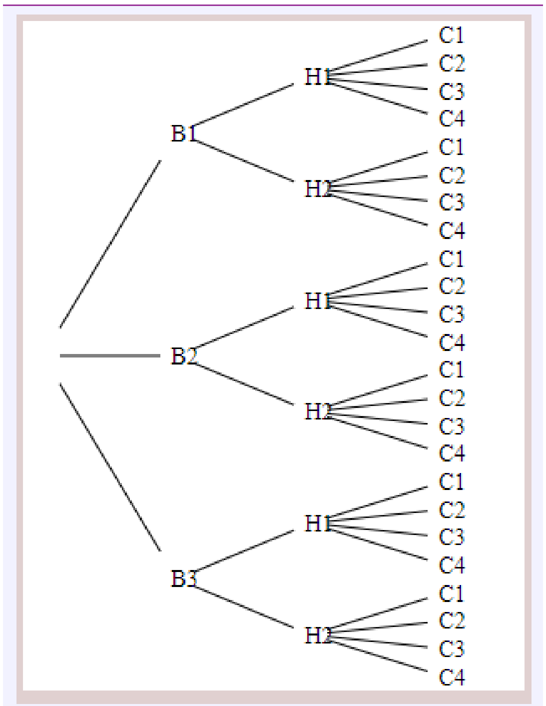
Les 6 tenues sont : B1H1 B1H2 B2H1 B2H2 B3H1 B3H2



Si on ajoute 4 chapeaux :

Il y a 3 x 2 x 4 = 24

Il y a **24 tenues différentes**



Exercice 8 :

Cinq coureurs, André, Bernard, Claude, Denis et Etienne disputent une course de cent mètres. Combien y-a-t-il de classements possibles à l'arrivée en supposant qu'il n'y a pas d'ex-aequo ?

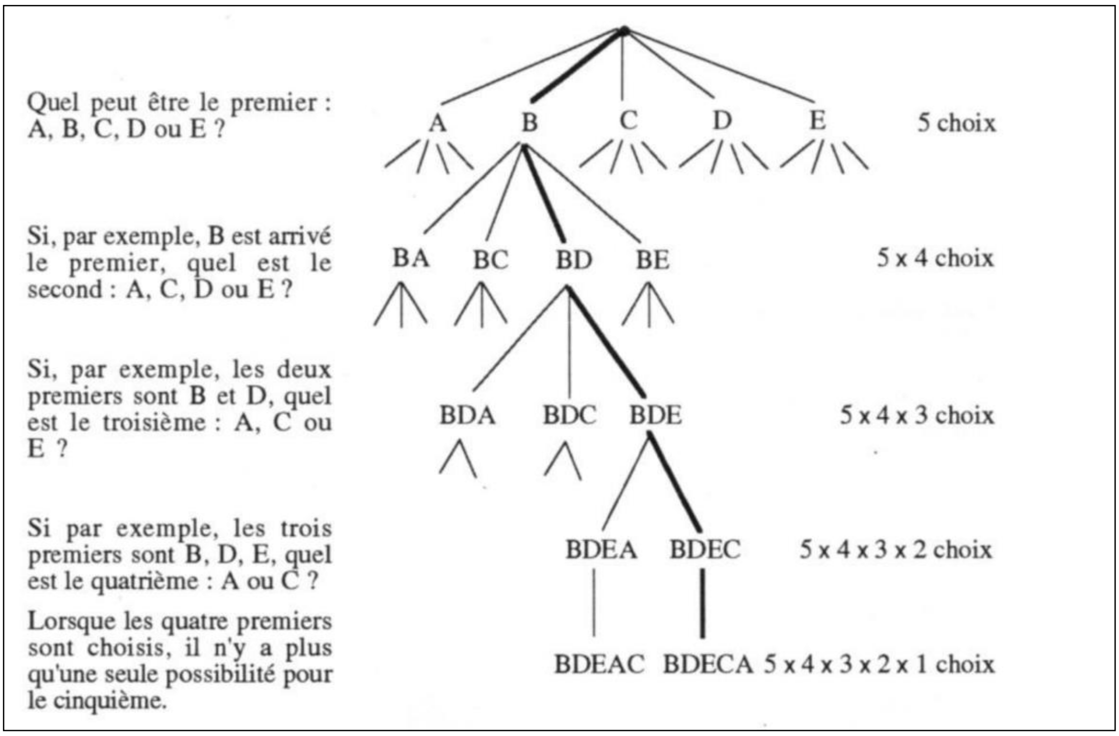
Pour la première place, il y a 5 possibilités.

A chacune de ces possibilités, on peut associer 4 choix possibles pour la seconde, etc.

Au total, le nombre de classements possibles sans *ex-aequo* est égal à : 5 x 4 x 3 x 2 x 1, soit **120 classements**.

Comme appui pour le raisonnement, on peut utiliser un arbre :

(source : Galion Thèmes, APMEP, 1994)

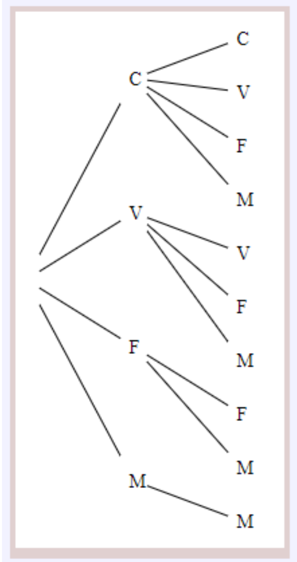


Exercice 9 :

Combien de coupes de glace à deux boules peut-on choisir, sachant qu'il y a 4 parfums différents : chocolat, vanille, fraise, melon. On pourra choisir plusieurs fois le même parfum. Et si on peut choisir 3 boules ?

On peut faire **10 combinaisons différentes** de glace deux boules avec 4 parfums différents :

CC CV CF CM VV VF VM FF FM MM



Pour dénombrer le nombre de glaces à 3 boules possibles avec 4 parfums, on peut distinguer les types de glaces différentes :

- Il y 4 combinaisons avec 3 parfums différents :
  CVF CVM CFM VFM
- Il y a 12 combinaisons possibles avec 2 boules de même parfum :
  CCV CCF CCM VVC VVF VVM

  FFC FFV FFM MMC MMF MMV
- Il y a 4 combinaisons avec 3 boules de même parfum :
  CCC FFF MMM VVV

Il y a donc 4+12+4 = **20 glaces différentes possibles**

Exercice 10 :

Théo a trouvé une carte bancaire. A un distributeur, il veut essayer tous les codes possibles. Combien de temps lui faudrait-il au plus s'il met 10s pour composer un code ?

Nombre de codes différents possibles avec 4 chiffres : 10 x 10 x 10 x 10 = 10 000.

Dans le cas le pire, on obtient le bon code à la dernière tentative, c'est-à-dire au bout de 10 000 x 10 s, ce qui donne 100 000 secondes.

Convertissons ce résultat (pour mieux percevoir son ordre de grandeur).

100 000 s = 1 666 x 60 s + 40 s = 1666 min + 40 s.

1666 min = 27 x 60 min + 46 min = 27 h + 46 min.

Il faudra donc **1 jour, 3 heures, 46 minutes et 40 secondes** pour essayer tous les codes.

Exercice 11 :

On a 3 paires de chaussettes : des rouges, des bleues et des vertes. Combien de paires de chaussettes dépareillées différentes peut-on faire avec ? On distinguera, ou pas, le pied gauche du pied droit.

<u>Premier cas :</u> on ne distingue pas le pied gauche du pied droit.

Dans ce cas, on peut faire **3 paires dépareillées** : RB RV BV

<u>Deuxième cas :</u> on distingue le pied gauche du pied droit.

Dans ce cas, il y a alors **6 paires dépareillées :** RB RV BR BV VR VB

(on peut s'aider d'un arbre)

Exercice 12 :

Le tournoi de rugby des Six Nations se joue entre six équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une seule les cinq autres équipes. Combien y-a-t-il de matchs joués en tout ?

Les six pays représentés sont la France, l'Angleterre, l'Ecosse, l'Irlande, le Pays de Galles, et l'Italie.

La France joue 5 matchs (un contre chacun des autres pays). L'Angleterre joue également 5 matchs, mais l'un d'entre eux est joué contre la France, et a donc déjà été compté. Il y a donc 5 + 4 = 9 matchs avec la France ou l'Angleterre. Ensuite l'Ecosse joue aussi 5 matchs, mais deux d'entre eux ont déjà été comptés ; il y a donc 9 + 3 = 12 matchs, avec la France, l'Angleterre ou l'Ecosse.

Pour l'Irlande, de la même manière, on rajoute deux matchs, puis un pour le Pays de Galles. Les matchs de l'Italie ont alors tous été comptés, et finalement on obtient un total de **15 matchs** (5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15).

Exercice 13 :

Une grille de mini-loto comporte 10 cases numérotées de 0 à 9. On doit cocher deux cases de cette grille.

a) Combien y-a-t-il de façons différentes de le faire ?
b) Et si l'on demandait de cocher 3 cases ?

❑ Cocher des numéros sur une grille

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

Une grille comporte dix cases numérotées de 0 à 9.

➭ On demande à Véronique de cocher deux cases de cette grille. Combien y a-t-il de façons différentes de le faire ?

On est tenté de raisonner ainsi :
Combien de façons de cocher la première case ? évidemment 10.
Combien de façons de cocher la deuxième ? évidemment 9
ce qui donnerait 10 x 9 c'est-à-dire 90 façons.
Ce résultat n'est pas correct.

En effet, cocher en premier la case 3 et en second la case 6 conduit au même résultat que cocher en premier la case 6 et en second la case 3. Parmi les 90 façons trouvées plus haut, chacune d'elles est comptée deux fois.

Le nombre cherché est donc en réalité 90 : 2 qui est égal à 45.

➭ **Et si l'on demandait de cocher 3 cases ?**

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

Un raisonnement trop superficiel conduirait à :
10 x 9 x 8 = 720 façons.
Mais le ticket ci-contre est compté plusieurs fois :

1 - 4 - 7 , 1 - 7 - 4 , 4 - 1 - 7 , 4 - 7 - 1 , 7 - 1 - 4 , 7 - 4 - 1
c'est-à-dire 6 fois.

Comme il en est de même pour chaque ticket, le nombre cherché est : 720 : 6 = 120.

Exercice 14 :

Combien y-a-t-il de cordes possibles si l'on place 50 points sur un cercle ?

Et si l'on place 1000 points ?

Avec 2 points	**Avec 3 points**	**Avec 4 points**
		
1 corde.	3 cordes (deux cordes ayant A comme extrémité, et [BC]).	Trois cordes ayant A comme extrémité, puis deux ayant B comme extrémités, mais pas A, et enfin [CD]. 3 + 2 + 1 = 6.

On se rend compte que le problème est similaire au problème du tournoi de rugby (exercice 12).

Ainsi, pour 50 cordes, si on numérote les sommets sur le cercle de 1 à 50, le sommet n°1 peut être associé à chacun des sommets de 2 à 50, puis ensuite, pour obtenir de nouvelles cordes, le sommet n°2 peut être associé à chacun des sommets de 3 à 50, etc.
On est donc conduit à calculer la somme des 49 premiers entiers : 1 + 2 + 3 + … 49, égale à la moitié de 50 x 49
Avec 50 points distincts sur un cercle, on peut ainsi créer **1225 cordes**.
Avec 1000 points : par un raisonnement similaire, on aboutit à la moitié de 1000 x 999, soit **499 500**.

Exercice 15 :

a) *Dans une soirée rassemblant dix personnes, chaque invité échange une poignée de main avec chacun des convives.*
- *Combien cela fait-il de poignées de main?*
- *Même question avec 20 personnes.*

b) *Même question s'il s'agit de 5 couples: chaque invité échange une poignée de mains avec chacun des convives, sauf avec son conjoint.*

a) On raisonne comme dans l'exercice 12 (en remplaçant un match par une poignée de mains, et 6 équipes par 10 personnes). On numérote les invités. Le premier invité échange 9 poignées de mains ; le second en échange 9 aussi, mais, parmi elles, une est échangée avec le premier invité : il y a donc 9 + 8 = 17 poignées de main auxquelles le premier invité ou le deuxième invité participent. Puis pour le 3ème invité, il y a 7 poignées de main (si on élimine celles qui ont déjà été comptées), pour le 4ème, 6, pour le 5ème, 5, pour le 6ème, 4, pour le 7ème, 3, pour le 8ème, 2, et pour le 9ème, une (avec le dernier invité !). Les poignées de main du dernier invité ont alors toutes été comptées, et on obtient finalement 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 poignées de main.
Pour calculer rapidement cette somme, on peut la noter S, puis remarquer le fait suivant
S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
S = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
2S= 10 + 10+ 10+ 10 + 10+ 10+ 10+ 10+ 10
On en déduit alors que S = 2 $(1+9)\times 9$.

Pour 20 personnes, en raisonnant de la même manière, on trouve un nombre de poignées de main égal à 19 + 18 + 17 + … + 2 + 1 = 190.

b) Pour 5 couples : si chacune des 10 personnes échangeait une poignée de main avec chacun des invités, il y aurait, en raisonnant comme précédemment, 45 poignées de main. Mais il y a 5 couples, donc 5 poignées de main en moins (une par couple) : il y a donc finalement 40 poignées de main.

Exercice 16 :

1. Combien y a t-il de nombres entiers naturels à 2 chiffres? à 3 chiffres? à 4 chiffres?

2.Parmi les nombres entiers naturels à 3 chiffres:

- *Combien y en a-t-il qui ont 3 chiffres identiques?*
- *Combien y en a-t-il qui ont 3 chiffres différents?*
- *Combien y en a-t-il qui ont exactement 2 chiffres différents, l'un des deux étant répété deux fois?*
- *Vrai ou faux: parmi les nombres à 3 chiffres, il y en a 28% qui ont au moins un chiffre répété? (justifier)*

1) Les entiers naturels s'écrivant avec 2 chiffres sont les entiers compris entre 10 et 99 ; il y en a 90. En effet, il y a 10 entiers commençant par 1, 10 commençant par 2, ..., 10 commençant par 9, soit 9 × 10 au total. Autre point de vue : il y a 99 entiers entre 1 et 99, et parmi eux, 9 entiers qui s'écrivent avec un seul chiffre (entre 1 et 9) ; les autres entiers s'écrivent avec deux chiffres, et il y en a donc 99 – 9, soit 90.

De la même manière, les entiers naturels s'écrivant avec 3 chiffres sont les entiers compris entre 100 et 999 ; il y en a 900 (100 commençant par 1, 100 commençant par 2, .., 100 commençant par 9, soit 9 × 100, ou, d'un autre point de vue, 999 - 99).
Enfin, les entiers naturels s'écrivant avec 4 chiffres sont les entiers compris entre 1000 et 9999 ; il y en a 9000.

2) a) Il y a 9 entiers naturels à trois chiffres dont les trois chiffres sont identiques : 111 ; 222 ; 333 ; 444 ; 555 ; 666 ; 777; 888 ; 999.

b) Pour écrire un entier à trois chiffres avec trois chiffres différents, on a 9 choix pour le premier chiffre (n'importe quel chiffre sauf 0), puis 9 choix encore pour le deuxième chiffre (n'importe lequel des dix chiffres sauf celui choisi comme chiffre des centaines) et enfin 8 choix pour le troisième chiffre (n'importe lequel des dix chiffres sauf les chiffres choisis pour les centaines et pour les dizaines) (on peut s'aider d'un arbre pour visualiser ces possibilités). On obtient finalement 9 × 9 × 8, soit 648 possibilités. Il y a donc 648 nombres avec trois chiffres tous différents.

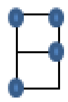
c) Considérons les 900 nombres à trois chiffres ; on peut les répartir en trois ensembles disjoints deux à deux (c'est-à-dire sans élément en commun) : - les entiers dont l'écriture utilise trois chiffres différents (il y en a 648 d'après la question 2b) ; - les entiers dont les trois chiffres sont identiques (on a vu à la question 2a qu'il y en a 9). - les entiers dont l'écriture utilise exactement deux chiffres identiques, le 3ème étant différent. (Remarque : on dit que ces trois ensembles forment une partition de l'ensemble des nombres à trois chiffres, car un nombre à trois chiffres quelconque appartient à un et un seul de ces trois ensembles.) Le nombre cherché est donc égal à 900 - 648 – 9, soit 243 : il y a 243 nombres à trois chiffres dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents.

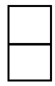
d) Les nombres à trois chiffres ayant au moins un chiffre répété sont les nombres des questions 2a et 2c, c'est-à-dire les nombres écrits avec trois chiffres identiques et les nombres ayant exactement deux chiffres répétés; il y en a donc : 9 + 243, soit 252. Il y a ainsi 252 nombres à trois chiffres ayant au moins un chiffre répété parmi 900 nombres à trois chiffres. Leur proportion est donc égale à : 900 252 = 0,28 soit 28%. La proposition est donc vraie.

Exercice bonus (Corse 97)

un caractère d'écriture Braille est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six nœuds de la grille ci-contre :

Par exemple, la lettre M s'écrit :

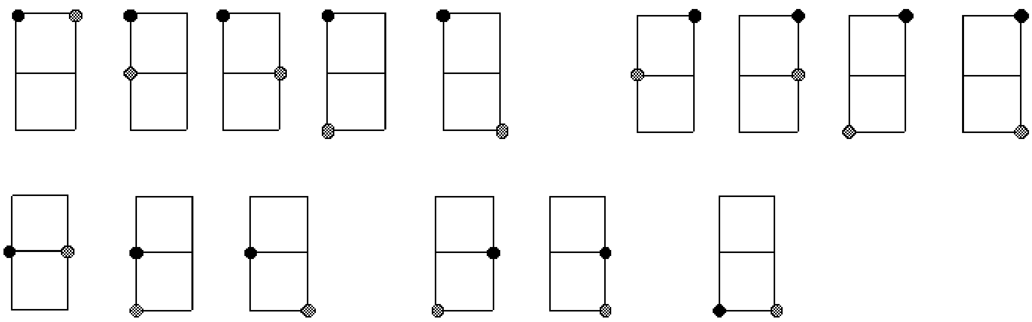




Combien de caractères de deux points peut-on concevoir ? Les écrire tous.

Combien de caractères de quatre points peut-on concevoir ?

Pour dénombrer tous les caractères de deux points que l'on peut concevoir, on s'organise de la manière suivante : on dessine d'abord tous les caractères qui ont un point en haut à gauche (il y en a 5) ; puis on dessine tous les caractères qui ont un point en haut à droite, en excluant le caractère qui contient un point en haut à gauche et un point en haut à droite, déjà recensé ; puis on continue, en passant en revue chacune des positions possibles ; on obtient alors les **15 possibilités suivantes**, toutes différentes (et il n'y en a pas d'autres) :



Quand on écrit un caractère à 2 points, les 4 emplacements laissés vides correspondent à un et un seul caractère à 4 points : il y a donc autant de caractères à 4 points que de caractères à 2 points, soit 15.