Situation essentielle

BANDE-UNITÉ

Ressources pour la situation hatier-clic.fr/21ermelcm1-210

Le problème

Les élèves doivent d'abord placer des nombres entiers de façon régulière, puis exprimer la mesure de longueurs avec des fractions de dénominateur 2, 4 ou 8.

Connaissances visées

- Utiliser le pliage d'une bande-unité pour mesurer ou produire une fraction de l'unité.
- Comprendre que, pour certaines mesures de longueurs, les nombres entiers ne suffisent pas, et qu'il est alors nécessaire de recourir à des fractions.
- Développer les premiers calculs et comparaisons sur les fractions.

Résumé de la situation

Cette situation est organisée en deux parties.

La première **(phase 1)** reprend de façon condensée la situation GRADUATIONS (ERMEL CM1 p. 260). Une description plus détaillée de sa mise en œuvre est à télécharger.

La seconde **(phases 2 à 5)** pose un problème : comment exprimer une mesure de longueur avec une bande-unité quand elle ne peut pas être exprimée en nombres entiers de bandes ?

- Dans les **phases 2 et 3**, des longueurs sont exprimées à l'aide de fractions.
- Dans la **phase 4**, ces fractions sont comparées.
- La **phase 5** propose de calculer avec ces fractions.

Organisation de la situation

Elle peut se dérouler en 6 séances : une seule séance pour chacune des phases 1, 3, 4 et 5, et deux séances pour la phase 2.

BANDE-UNITÉ (ERMEL CM1 p. 404) est une situation du thème «Mesures, fractions et décimaux».

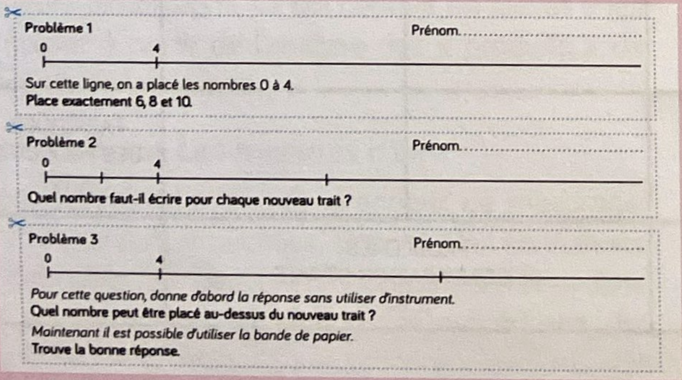
Phase 1 : Utiliser des nombres entiers comme mesures de longueurs pour graduer une droite

Dans cette phase, les élèves travaillent en binômes.

Le problème consiste, pour les élèves, à placer des nombres sur une ligne droite, à partir de la donnée de deux nombres (0 et n) correspondant à deux points de cette ligne ; puis ils doivent retrouver des nombres dont la position sur la ligne est donnée.

Matériel pour un binôme

- Les fiches problèmes (cf. Annexes 1a p. 72 et 1b à télécharger).


Problème 1 Prénom........................

0 4

Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 à 4.
Place exactement 6, 8 et 10.

Problème 2 Prénom........................

0 4

Quel nombre faut-il écrire pour chaque nouveau trait ?

Problème 3 Prénom........................

0 4

Pour cette question, donne d'abord la réponse sans utiliser d'instrument.
Quel nombre peut être placé au-dessus du nouveau trait ?
Maintenant il est possible d'utiliser la bande de papier.
Trouve la bonne réponse.

- Des bandes de papier (deux ou trois), de longueur 29,7 cm, découpées dans des feuilles A4.

Il est précisé aux élèves qu'ils peuvent utiliser les bandes mises à leur disposition et tout matériel habituel **sauf la règle graduée**.

Objectifs de la phase 1

Pratiquer des pliages pour fractionner des longueurs.
Réaliser une graduation régulière de droite en utilisant d'une part les relations entre les nombres (par exemple : 2 est au milieu du segment [0, 4]), et d'autre part le pliage de la bande support ou le report de distances.

Matériel

Pour la mise en commun, on pourra fournir ces feuilles aux élèves en format A3.

Procédures initiales

Des procédures utilisant le report de distances, le pliage, la notion de milieu, le placement de nombres auxiliaires, les notions arithmétiques de « demi », « double », « quart »... suffisent pour répondre.

Formulation des réponses

Dans cette phase, les élèves peuvent répondre avec des mots, les écritures fractionnaires étant attendues en phase 2.

Communication du problème 1

Présentation des bandes de papier et du matériel autorisé.
L'enseignant affiche au tableau la partie de la feuille correspondant au premier problème (annexe 1a, problème 1).
Lecture de l'énoncé. Distribution du matériel.

Présentation

La présentation peut se faire sur transparent ou en vidéoprojection. La lecture conduit les élèves à décrire ce qui est dessiné et à identifier la question.

Recherche par deux pour le problème 1

Mise en commun pour le problème 1

Il est préférable de faire présenter par chaque binôme le positionnement des trois nombres à la suite.

La mise en commun a pour buts :

- de mettre en évidence les différentes procédures utilisées ;
- de déterminer collectivement les contraintes pour respecter une « bonne » graduation.

Relations entre les nombres

Les relations numériques entre 4, 6, 8 et 12, peuvent conduire les élèves à placer les nombres dans des ordres différents :

- placer 8 parce que c'est le double de 4 et qu'il suffit de reporter la mesure ;
- placer 2 pour obtenir 6 par report ; ou le 8, puis le 12, puis le 6.

Reprise de la recherche pour les problèmes 2 et 3

Mise en commun pour les problèmes 2 et 3

Approfondissement

Voir la description détaillée proposée en annexe 1b à télécharger.

Choix des valeurs (approfondissement)

Ici, les nombres donnés sont plus grands (36, 27, 30...) et les relations entre eux moins familières.

Synthèse

Elle doit porter sur :

- les contraintes de placement à respecter ;
- les procédures correctes qui ont été utilisées.

Phase 2 : Utiliser des fractions de l'unité pour exprimer la mesure de longueur de segments

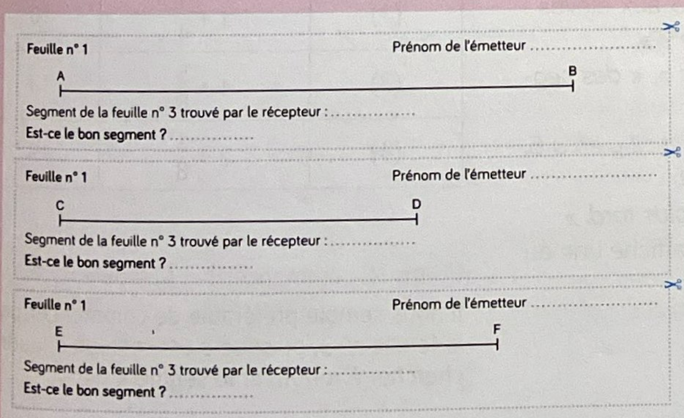
Il s'agit d'une **situation de communication**. Chaque élève doit élaborer un message traduisant la mesure de la longueur d'un segment, de telle sorte qu'un autre élève puisse reconnaitre ce segment dans une famille de segments.

Objectif de la phase 2

Faire apparaitre que, pour les mesures de certaines longueurs, les nombres entiers ne suffisent pas, et qu'il est alors nécessaire de recourir à de nouveaux nombres pour les traduire : des fractions.

Matériel pour chaque élève d'un binôme

- Une bande-unité de longueur 8 cm, mais de largeur différente suivant les élèves (1 à 3 cm), découpée dans du papier courant pour pouvoir être pliée.
- Une feuille n°1 ci-dessous (cf. Annexe 2a p. 72 ou à télécharger) sur laquelle figure l'un des trois segments [AB], [CD], [EF]



Organisation de l'activité

- Préalablement, l'enseignant aura réparti les élèves en binômes. Les deux élèves d'un binôme recevront des segments différents à décrire.
- Les élèves seront d'abord tous émetteurs (pour traduire la longueur de leur segment [AB], [CD] ou [EF]), puis après que l'enseignant ait échangé les messages des deux élèves de chaque binôme, ils seront tous récepteurs d'un message dont ils devront identifier le segment décrit. Ensuite, les deux élèves de chaque binôme feront le bilan de leurs échanges.

- Une feuille n°2 de 15 × 10 cm (cf. Annexe 2b à télécharger), support de la correspondance écrite :

Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : ....

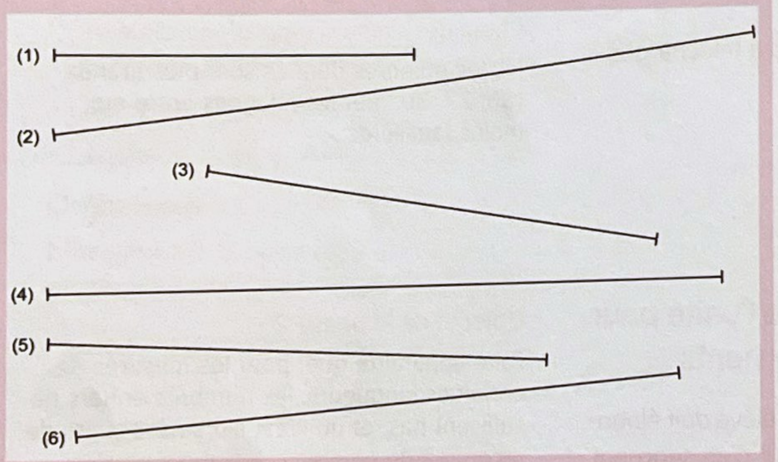
Message :

Prénom du récepteur : ....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : ....

Remarques :

- Une feuille n°3 (cf. Annexe 2c p. 73 ou à télécharger) où figurent les segments (1), (2), (3), (4), (5), (6), dont les 3 segments de la feuille n° 1, [AB], [CD] et [EF], font partie :



- Il est impératif que les élèves ne disposent **pas de règle graduée**

Matériel pour l'enseignant

- Une bande-unité de longueur 32 cm.
- Les segments des feuilles n° 1 et n° 3 agrandis 4 fois, découpés, par exemple, dans un rouleau de caisse.

Présentation de la feuille n°3

L'enseignant commence par présenter la feuille n°3 aux élèves : *« Voici la feuille n°3. Que voyez-vous sur cette feuille ? »*
Réponses des élèves : « *des numéros* », « *des traits* », « *des segments* ».
L'enseignant conclut : *« Ce sont des segments en effet ; il y en a 6, chacun a un numéro. »* Il les montre successivement.
Puis il précise : *« Cette feuille, je vous la distribuerai plus tard. »*
L'enseignant pose la pile de feuilles n°3 à part et en affiche une au tableau.

Matériel

- Les bandes-unités ont des largeurs différentes afin que la largeur de la bande, n'étant pas commune à toute la classe, ne puisse pas être prise comme une petite unité complémentaire.
- En cas de reproduction d'originaux des feuilles n° 1 et 3 avec une photocopieuse, il faut s'assurer que les longueurs sont bien respectées.
- Les dimensions de la feuille n°2 (15 × 10 cm) sont choisies pour qu'il soit impossible de reproduire le segment sur cette feuille.

Choix didactiques

- Le contexte : le problème de départ est un problème de mesures effectives de longueurs (phases 2 et 3) ; les mesures sont ensuite seulement évoquées (phase 4) ; et *in fine* (phase 5) les élèves ne travaillent que sur des écritures fractionnaires sans référence à l'unité.
- Les fractions travaillées : ce sont toujours des demis, des quarts, des huitièmes.
- Les longueurs à mesurer : elles peuvent toujours s'exprimer à l'aide des fractions précédentes.
- Les écritures fractionnaires favorisent des décompositions additives faisant apparaitre les parties entières, mais aussi des transformations de fractions.

Longueur des segments

Segment	Mesure avec la bande-unité (u)	Mesure en cm
[AB] et (2)	$2 + \frac{1}{2}$	20
[CD] et (5)	$1 + \frac{3}{4}$	14
[EF] et (6)	$2 + \frac{1}{8}$	17
(1)	$1 + \frac{1}{4}$	10
(3)	$1 + \frac{5}{8}$	13
(4)	$2 + \frac{3}{8}$	19

Pourquoi commencer par la feuille n° 3 ?

Il nous semble préférable de commencer par la feuille n° 3, puisque c'est celle où il faudra chercher à retrouver le segment décrit.

Présentation de la feuille n°1

L'enseignant : « *Maintenant, je vous montre* **une feuille numéro 1**. *Qu'y a-t-il dessus ?* » Les élèves répondent.

L'enseignant indique alors : « *Chacun de vous aura une feuille n° 1 avec un segment : [AB] ou [CD] ou [EF].* » (en montrant successivement les deux autres feuilles n° 1).

L'enseignant précise encore : « *Chaque segment dessiné sur la feuille n°1 est exactement de la même longueur que l'un des segments de la feuille n°3 que je vous ai montrée tout à l'heure et que je vous donnerai plus tard.* » Puis, pour finir, il demande : « *Qui veut redire ce que chacun aura ?* » Les élèves répondent, rectifient, complètent.

Communication du problème

L'enseignant reprend : « *J'ai fait des binômes de deux élèves, qui ont des feuilles n° 1 différentes, donc des segments différents. Il faudra que chacun fasse trouver à l'autre quel est son segment. Tout le monde aura une feuille n°3, sur laquelle il y a tous les segments… Alors que vous faudra-t-il faire ?* » Les élèves font des hypothèses, que l'enseignant invalide, fait préciser, fait compléter, fait mieux formuler…

Il ajoute alors : « *Je vous donnerai une feuille,* **la feuille n°2**, *pour écrire dessus, mais ces feuilles sont petites, vous ne pourrez pas dessiner votre segment.* » Il montre un exemplaire et explique : « *L'émetteur, c'est l'élève qui a la feuille n°1, celui qui va écrire un message que je donnerai à l'autre élève de l'équipe, qui sera récepteur. Chacun sera donc émetteur puis récepteur.* »

Il poursuit (en montrant une bande-unité) : « *Je donnerai aussi à chacun une bande comme celle-ci : comme vous n'avez pas de double décimètre, vous pourrez utiliser cette bande comme unité de longueur, on va l'appeler* **bande-unité**. »

Puis l'enseignant récapitule : « *Voilà ce que chacun de vous aura : une feuille n° 1 et une bande-unité ; il faudra alors qu'il écrive sur la feuille n° 2 un message qui permettra à l'autre de trouver sur la feuille n° 3 le segment qui a la même longueur que le segment qui est sur sa feuille n° 1, en utilisant la bande-unité.* » Il fait reformuler la consigne par des élèves.

Recherche et établissement du message

L'enseignant distribue à chaque élève une feuille n° 1, une feuille n° 2 et une bande-unité. Il fait écrire les noms sur la feuille n° 1 et sur la feuille n° 2 à l'emplacement « émetteur ».

Puis il demande aux élèves d'écrire leur message à la place prévue sur la feuille n° 2.

Les élèves établissent leur message. L'enseignant rappelle ce qui est important : le message doit permettre à celui qui va le recevoir de retrouver, plus tard, sur la feuille n° 3, le segment qui aura été décrit.

Réception des messages et recherche du segment décrit

Les élèves deviennent récepteurs. L'enseignant procède aux échanges des feuilles n° 2 au sein de chaque équipe, et fait écrire les prénoms des récepteurs

Puis les feuilles n° 3 sont distribuées.

L'enseignant rappelle : « *Votre coéquipier vous a écrit un message pour décrire le segment qu'il avait. Il faut maintenant qu'avec son message, vous le retrouviez sur la feuille n°3. Vous écrivez à la place indiquée le segment de la feuille n°3 correspondant au message…*

Présentation

Il est nécessaire d'aller lentement de façon à ce que chaque élève identifie bien :
- qu'il y a un segment sur chaque feuille n° 1 ; mais que ce segment n'est pas le même sur toutes les feuilles ;
- qu'il y a des segments sur la feuille n° 3 ; les segments de toutes les feuilles n° 1 sont présents sur la feuille n° 3.

Il est très important que les élèves aient saisi que le segment de chaque feuille n° 1 correspond à un segment de même longueur de la feuille n° 3 mais qu'ils ne sont pas désignés de la même façon.

Exemple d'échanges

Un élève : « *Il faudra que l'élève n° 1 fasse deviner à l'élève n°2 le segment qu'il a.* »
L'enseignant : « *Comment lui fera-t-il deviner ?* »
Un élève : « *Il lui montrera comme ça avec sa main.* »
L'enseignant : « *Non, parce que les groupes sont éloignés, et ce ne sera pas assez précis.* »

Il est utile qu'au fur et à mesure de la présentation le matériel soit affiché au tableau : feuille n° 3 recto caché, feuille n° 1, feuille n° 2, bande-unité.

Constitution des équipes

Chaque élève n'a pas besoin de savoir à qui son message est destiné.
Les interlocuteurs d'un même binôme ne doivent pas se trouver l'un à côté de l'autre ; ils peuvent ainsi mieux comprendre qu'ils ne pourront ni montrer quelque chose à l'autre ni se parler.
L'enseignant leur fait remarquer qu'ils ne peuvent pas encore remplir l'emplacement « Prénom du récepteur » puisqu'ils ne connaissent pas encore le récepteur de leur message.

Procédures possibles pour le mesurage :

- utilisation des doigts ;
- emploi de mesures en cm et mm estimés ;
- pliages en deux successifs ;
- autres pliages erronés (par exemple en 3) ;
- reports de bande-unité et de fractions de bande.

Messages

Le texte « L'approche des fractions » p. 75 présente une analyse des descriptions produites.

Ensuite, que vous ayez trouvé un segment facilement ou pas, écrivez vos remarques concernant le message. »

Vérification

Les élèves récupèrent leur feuille n° 2 et complètent leur feuille n° 1 en vérifiant si leur message a permis au récepteur de trouver le bon segment.

Une fois cette vérification effectuée par chaque élève de son côté, elle peut se poursuivre en réunissant les deux coéquipiers.

Regroupement des équipes

Cela leur permet d'échanger sur leurs messages pour en apprécier la pertinence et les erreurs.

Mise en commun

L'enseignant recense les messages obtenus **pour le segment [AB]**. Il les écrit au tableau et, à côté de chacun, il note le segment trouvé par le récepteur.

Il présente alors le matériel collectif : *« Tout le matériel que vous avez utilisé (segments de la feuille n° 1, de la feuille n° 3, bande-unité) je les ai faits en 4 fois plus grand pour que l'on voie bien. »*

Les auteurs des messages viennent expliciter leur démarche avec le matériel agrandi. Un débat est mené par confrontation entre le segment origine et le segment trouvé sur la feuille n° 3, ainsi que sur le contenu du message (validité, précision, forme, rectification si possible) : réussites, erreurs et causes d'échec sont ainsi analysées. Les messages sont comparés (*« On dit la même chose mais pas de la même manière. »*) sans jugement de valeur.

Remarques sur les messages

Les élèves s'expriment en termes :
- d'**actions successives** : *« Tu prends la bande, tu la poses sur le segment, tu fais un petit trait, tu plies la bande en deux… »*
- de « **mesures** » avec des mots comme « moitié », « quart » : *« Mon segment fait une bande et trois quarts de bande. »*

Les notations fractionnaires sont souvent, à ce stade, peu utilisées dans les messages.

Le mot « demi » est utilisé pour désigner les fractions de bande obtenues par pliage en deux et les écritures fractionnaires sont introduites pour reformuler les résultats proposés par les élèves.

Enfin, les élèves vérifient avec le matériel collectif et le matériel individuel que le segment (2) a la même longueur que le segment [AB] en le mesurant avec la bande et en procédant par superposition.

Fractions et terminologie

On écrit par exemple « $AB = 2\,u + \frac{1}{2}\,u$ » et « $AB = \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,u$ », et on formule la relation :
« Dans une unité il y a deux demi-unités. »
L'enseignant peut fabriquer une bande « moitié », écrire dessus « $\frac{1}{2}$ », *« un demi »* et l'afficher à côté de la bande-unité.
De même pour des bandes $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$.

On procède de la même façon **pour les segments [CD] et [EF]**.

Pour conclure, on écrit : « $CD = 1\,u + \frac{3}{4}\,u$; $CD = 1\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u$; $EF = 2\,u + \frac{1}{8}\,u$; etc. » Éventuellement avec une écriture soustractive, par exemple : « $CD = 2\,u - \frac{1}{4}\,u$ ».

Trace écrite

À l'issue de cette activité, on pourra conserver une trace écrite sous forme d'affichage collectif, et en faisant coller dans les cahiers des bandes avec des remarques comme ci-dessous :

Pourquoi une trace ?

Cette trace a pour but de faire visualiser et mémoriser à la fois les longueurs de mesures des fractions de l'unité, ainsi que les équivalences de longueurs. Elle fournit aussi aux élèves des notations numériques pour écrire plus facilement des mesures dans les activités suivantes.

1 unité							
$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

*« Dans une unité, il y a 2 demis, il y a 4 quarts, il y a 8 huitièmes.
Dans un demi, il y a 2 quarts, il y a 4 huitièmes.
Dans un quart, il y a 2 huitièmes. »*

Entrainement à la mesure

Les élèves doivent mesurer tous les segments de la feuille n° 3 en utilisant la bande-unité et écrire leurs résultats à côté ou au-dessus des segments en respectant les notations précédemment introduites. Il s'agit de réinvestir et de consolider les notions, le vocabulaire et les notations introduits lors de la phase précédente.

Mise en commun

L'enseignant écrit au tableau les résultats obtenus pour chaque segment. Ces résultats sont vérifiés individuellement par chacun, puis collectivement. Cette vérification permet d'expliciter les erreurs, de mettre en évidence et de justifier plusieurs écritures pour une même longueur.

Exemples de mesures produites dans une classe pour le segment (1)

- $1\text{ u} + \frac{1}{4}\text{ u}$ (16 fois) ;
- $1\text{ u} + \frac{2}{8}\text{ u}$ (1 fois) ;
- $1\text{ u} + \frac{1}{2}\text{ u}$ (1 fois) ;
- $1\text{ u} + \frac{2}{4}\text{ u}$ (2 fois) ;
- $1\text{ u} + \frac{3}{4}\text{ u}$ (2 fois) ;
- 1 u (1 fois).

Exemple d'écriture

« $1\text{ u} + \frac{1}{4}\text{ u} = 1\text{ u} + \frac{2}{8}\text{ u}$ car dans un quart il y a deux huitièmes. »

Phase 3 : Utiliser des fractions pour construire des segments

Matériel individuel

- Une bande-unité (longueur 8 cm).
- Une bande de papier sur laquelle est tracée une demi-droite d'origine O (sur une feuille A4 – cf. Annexe 3a p. 73 ou à télécharger).
- La même bande de papier (grammage 60 g ou calque) avec les points correctement placés sur la demi-droite, pour la vérification (cf. Annexe 3b à télécharger).

Matériel collectif

- La bande-unité de 32 cm et une demi-droite tracée au tableau.

Objectifs de la phase 3

Renforcer la compréhension des écritures fractionnaires, l'appropriation de fractions équivalentes.
Les rendre opérantes pour la construction de segments de mesures fractionnaires données, en vue de faciliter la comparaison des positions des points dans la mise en commun.

Pourquoi un papier de 60 g ?

Il permet de comparer par superposition.

Communication du problème

L'enseignant fait remettre en mémoire ce qui a été fait à la séance précédente.
Il indique ensuite, en montrant les pièces successives : « *Chacun de vous va recevoir sa bande-unité et une feuille avec une demi-droite d'origine O.* »

O ______________________________

Puis il écrit le texte suivant au tableau :
« Placez sur la demi-droite les points A, B, C tels que :

$OA = 1\,u + \frac{5}{4}\,u$; $OB = 2\,u + \frac{2}{4}\,u$; $OC = \frac{5}{2}\,u + \frac{1}{8}\,u$. »

Choix didactiques

La présence de la bande-unité permet le mesurage.
Les longueurs données sont choisies de manière à favoriser des décompositions ($\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$) et des transformations ($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$).

Recherche individuelle

L'enseignant affiche au tableau la trace écrite collective agrandie constituée en phase 2. Il encourage les élèves à faire preuve de soin et de précision dans leur travail.

Il observe les procédures et les productions en passant auprès des élèves. Il constitue un échantillon représentatif de ces productions (6 ou 7 par exemple).

Procédures possibles

- Pour A : report de la bande 1 fois, puis du quart de bande 5 fois ; ou report de la bande 2 fois, puis du quart de bande 1 fois.
- Pour B et C : mêmes types de procédures, mais des élèves ne repartent pas de l'origine, ils placent B un quart après A, et C un huitième après B.

Tous les élèves ne sont pas familiers avec des écritures où le numérateur est supérieur au dénominateur (fractions supérieures à 1). Aussi, il s'agit de les laisser transformer eux-mêmes $\frac{5}{4}$ en $1 + \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Mise en commun

Nous suggérons d'afficher les productions de l'échantillon retenu les unes au-dessous des autres, ce qui rend possible une première comparaison visuelle et l'identification de certaines erreurs de positionnement des points.

L'examen s'effectue point après point.
Pour A, par exemple, l'enseignant peut demander : « *Que pouvez-vous dire du placement du point A sur ces différentes productions ?* » Les élèves réagissent, en indiquant soit que c'est partout positionné « pareil » et que cela se justifie, soit que des positions sont inadéquates, en le justifiant aussi.
Les élèves auteurs sont alors appelés successivement à présenter leurs procédures, et les erreurs sont traitées.

Des égalités sont formulées et justifiées en plaçant les points avec la bande de 32 cm sur une demi-droite tracée au tableau.

Vérification

L'enseignant remet à chacun la deuxième feuille (avec une demi-droite sur laquelle les points A, B, C sont correctement placés – annexe 3b). Les élèves vérifient si leurs points sont bien positionnés.

Prolongement

Les élèves disposent encore de la feuille avec les points A, B, C correctement tracés. Ils ont à chercher les longueurs AB, BC, AC.

Phase 4 : Comparer des mesures fractionnaires de longueurs

Matériel pour un binôme
- Une feuille avec l'énoncé (cf. Annexe 4 p. 74 ou à télécharger).

Communication du problème

L'enseignant fait rappeler ce qui a été fait dans les phases 2 et 3.

Puis il annonce : « *Avec la bande-unité, j'ai mesuré 6 segments. J'ai trouvé les longueurs suivantes* (il les écrit au tableau) :

$OA = 1\,u + \frac{5}{2}\,u$; $OB = \frac{7}{2}\,u$; $OC = 2\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u$;

$OD = \frac{10}{4}\,u$; $OE = 2\,u + \frac{7}{8}\,u$; $OF = 1\,u + \frac{15}{8}\,u$.

Vous allez devoir trouver le segment le plus court, le segment le plus long, et dire s'il y a des segments de même longueur. »
Il ajoute : « *Aujourd'hui, pas de bande-unité, ni de demi-droite tracée.* »

Recherche par deux

L'enseignant donne à chaque équipe une feuille énoncé.
Tous les élèves cherchent pendant un moment.

En cas de difficulté importante de certains élèves, l'enseignant pourra leur fournir une bande-unité et les inviter à placer les points A, B, C, D, E et F, chacun sur une demi-droite d'origine O : la comparaison des longueurs en découle. Il leur est aussi possible de construire les différentes longueurs les unes en dessous des autres à l'aide de leur bande.

Mise en commun

L'enseignant récapitule les 3 questions au tableau :

« • *Segment le plus court ?*
• *Segment le plus long ?*
• *Segments de même longueur ?* »

Exemple d'égalité

« $1\,u + \frac{5}{4}\,u = 2\,u + \frac{1}{4}\,u$ car dans une unité il y a quatre quarts, donc cinq quarts c'est une unité et un quart. »

Prolongement

Les élèves peuvent opérer :
- par calcul sur les mesures données pour OA, OB, OC ;
- en utilisant la bande pour mesurer les longueurs.

Objectif de la phase 4

Faire apparaitre comment comparer des mesures fractionnaires.
Ne disposant ni de bande, ni de demi-droite avec les points tracés, les élèves doivent raisonner sur les écritures.

Mesures pour la comparaison

$OA = 3\,u + \frac{1}{2}\,u$ $OB = 3\,u + \frac{1}{2}\,u$

$OC = 2\,u + \frac{3}{4}\,u$ $OD = 2\,u + \frac{1}{2}\,u$

$OE = 2\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{8}\,u$

$OF = 2\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{8}\,u$

Réponses

Segment le plus court : OD.
Segment le plus long : OA ou OB.
Segments de même longueur : OA = OB et OE = OF.

Procédures

Les élèves doivent opérer sur les mesures données en comparant les nombres. Pour cela, ils peuvent :
- déterminer la partie entière et la partie fractionnaire complémentaire de chacun ;
- ramener chaque nombre à une écriture fractionnaire comparable (de même dénominateur).

Puis il interroge une équipe : « *Quel est le segment le plus court ?* » Il note la réponse des élèves puis demande : « *Quelle équipe a trouvé une autre réponse ?* » Les réponses différentes sont ainsi données et notées, sans indiquer leur fréquence.

L'enseignant choisit alors une réponse (plutôt rare) et demande aux élèves de venir expliquer ce qu'ils ont fait. Le débat s'engage en s'appuyant sur les écritures et les transformations effectuées pour les comparer. De même pour les autres réponses trouvées.

Même déroulement pour le segment le plus long.

La validation pour ces deux questions s'effectue à la fin en plaçant les points sur une demi-droite tracée au tableau.

Pour la troisième question, le débat est déjà avancé en raison de ce qui vient d'être fait pour les deux premières questions.

L'enseignant interroge : « *Qui propose une égalité ?* »

Au besoin l'égalité est débattue puis validée.

L'enseignant poursuit : « *Qui en propose une autre ?* », et ainsi de suite... Les égalités utilisées par les élèves sont notées, débattues, validées, ainsi que les arguments utilisés.

Recensement des réponses

Le procédé proposé permet d'éviter qu'une réponse fréquente n'incite certaines équipes à modifier leur réponse.

Exemples d'égalités :

- « $1\text{ u} + \frac{5}{2}\text{ u} = \frac{7}{2}\text{ u}$ car $1\text{ u} = \frac{2}{2}\text{ u}$, dans une unité il y a deux demis. » ;
- « $1\text{ u} + \frac{5}{2}\text{ u} = 3\text{ u} + \frac{1}{2}\text{ u}$ car $\frac{5}{2}\text{ u} = 2\text{ u} + \frac{1}{2}\text{ u}$. » ;
- « $\frac{7}{2}\text{ u} = 3\text{ u} + \frac{1}{2}\text{ u}$ car $\frac{6}{2}\text{ u} = 3\text{ u}$. » ; etc.

Phase 5 : Calculer avec des écritures fractionnaires sans référence aux longueurs

Cette phase est composée de deux activités successives :

- l'activité 1 sensibilise les élèves au fait que des écritures employant des fractions de dénominateurs différents peuvent toutefois être égales ;
- l'activité 2 les incite à transformer des écritures en utilisant des fractions différentes de celles qui apparaissent dans la mesure.

Objectifs de la phase 5

Habituer les élèves à raisonner sur des nombres (fractions) et non plus sur des longueurs en référence à un contexte.

Retrouver des écritures d'une même mesure de longueur lorsqu'il y a des fractions de dénominateurs différents.

Choix didactiques

Recherches faites sans matériel.

Nombres sans référence à une unité.

ACTIVITÉ 1

Matériel individuel

- Une feuille avec l'énoncé (cf. Annexe 5 p. 74 ou à télécharger).

Voici des écritures : $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{14}{8}$; $\frac{10}{8}$; $\frac{7}{4}$; $2 + \frac{1}{2}$; $1 + \frac{6}{8}$.

Lesquelles désignent la même longueur ?

Les élèves travaillent individuellement sur la feuille distribuée.

Mise en commun

L'enseignant recense les égalités trouvées. Pour chacune d'elles, il relève le nombre d'accords et de désaccords et il fait expliciter les arguments. La validation des égalités se fait ensuite en construisant des segments au tableau à l'aide d'une bande-unité.

Exemples de productions

- « $\frac{10}{8} = 1 + \frac{1}{4}$ car dans une unité il y a huit huitièmes, et deux huitièmes égalent un quart. »
- « $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ car il y a deux huitièmes dans un quart. »

Modulation suivant les réponses

Certains élèves raisonnent sur des nombres, d'autres réévoquent le contexte mais calculent sur des nombres. Si des élèves ne peuvent s'exprimer qu'en référence au contexte, l'enseignant l'acceptera.

ACTIVITÉ 2

Matériel individuel

- Une feuille avec l'énoncé (cf. Annexe 5 p. 74 ou à télécharger).

Pour chacune de ces mesures, $\frac{18}{8}$ et $3 + \frac{1}{4}$, trouve d'autres écritures et justifie les égalités trouvées.

Même déroulement que pour l'activité 1.

Égalités possibles pour l'activité 2

- « $\frac{18}{8} = 2 + \frac{2}{8}$, dans une unité il y a 8 huitièmes. » ;
- « $\frac{18}{8} = 2 + \frac{1}{4}$ » ;
- « $\frac{18}{8} = 1 + \frac{10}{8}$ » ;
- « $3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$, dans 3 unités, il y a $\frac{12}{4}$. » ;
- « $3 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{5}{4}$ » ; etc.

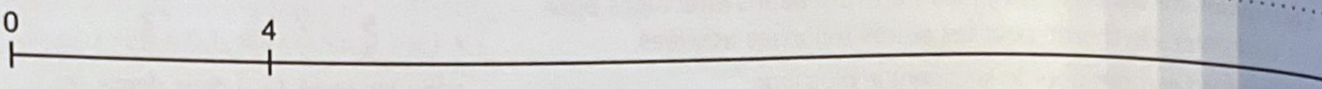
Annexe 1a

GRADUATIONS (PROBLÈMES 1 À 3)

PHASE 1 – MATÉRIEL POUR UN BINÔME

Agrandir à 141 %

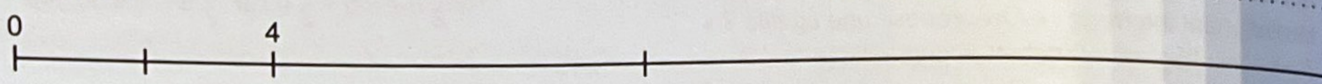
Problème 1 Prénom.........................



Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 à 4.

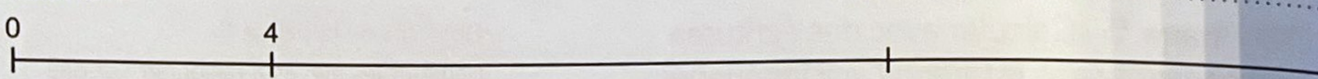
Place exactement 6, 8 et 10.

Problème 2 Prénom.........................



Quel nombre faut-il écrire pour chaque nouveau trait ?

Problème 3 Prénom.........................



Pour cette question, donne d'abord la réponse sans utiliser d'instrument.

Quel nombre peut être placé au-dessus du nouveau trait ?

Maintenant il est possible d'utiliser la bande de papier.

Trouve la bonne réponse.

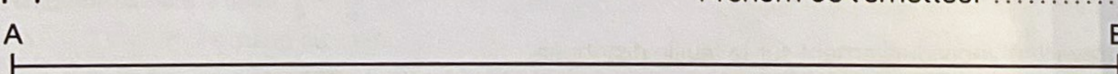
Annexe 2a

MESURES DE SEGMENTS • FEUILLE N° 1

PHASE 2 – MATÉRIEL POUR TROIS ÉLÈVES

Agrandir à 141 %

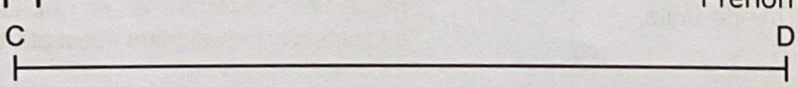
Feuille n° 1 Prénom de l'émetteur ....



Segment de la feuille n° 3 trouvé par le récepteur : ....

Est-ce le bon segment ? ....

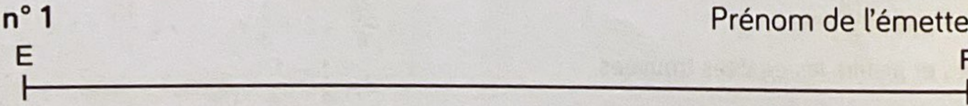
Feuille n° 1 Prénom de l'émetteur ....



Segment de la feuille n° 3 trouvé par le récepteur : ....

Est-ce le bon segment ? ....

Feuille n° 1 Prénom de l'émetteur ....



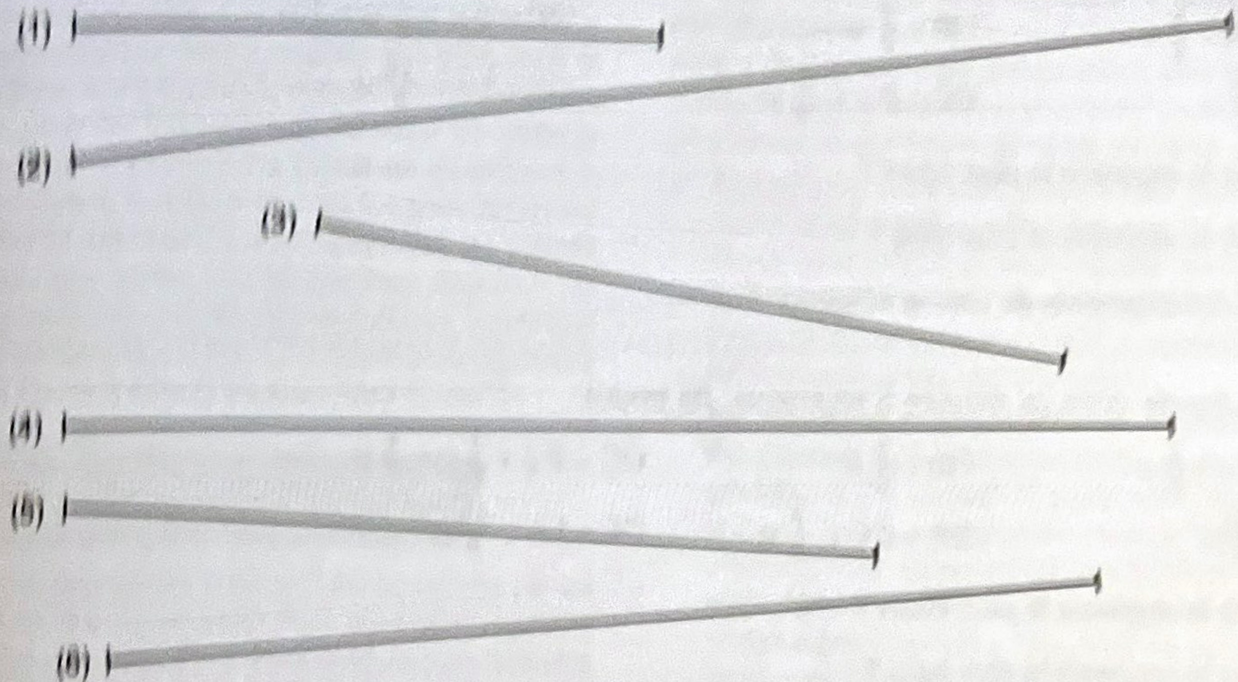
Segment de la feuille n° 3 trouvé par le récepteur : ....

Est-ce le bon segment ? ....

Agrandir à 141 %

Feuille n° 3

Prénom ....



Annexe 3a

CONSTRUCTION DE SEGMENTS
PHASE 3 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES

Agrandir à 141 %

Prénom ....

Place sur la demi-droite les points A, B, C, tels que :

$OA = 1\,u + \frac{3}{4}\,u$ $\quad$ $OB = 2\,u + \frac{3}{4}\,u$ $\quad$ $OC = \frac{5}{2}\,u + \frac{1}{8}\,u$

O

Prénom ....

Place sur la demi-droite les points A, B, C, tels que :

$OA = 1\,u + \frac{3}{4}\,u$ $\quad$ $OB = 2\,u + \frac{3}{4}\,u$ $\quad$ $OC = \frac{5}{2}\,u + \frac{1}{8}\,u$

O

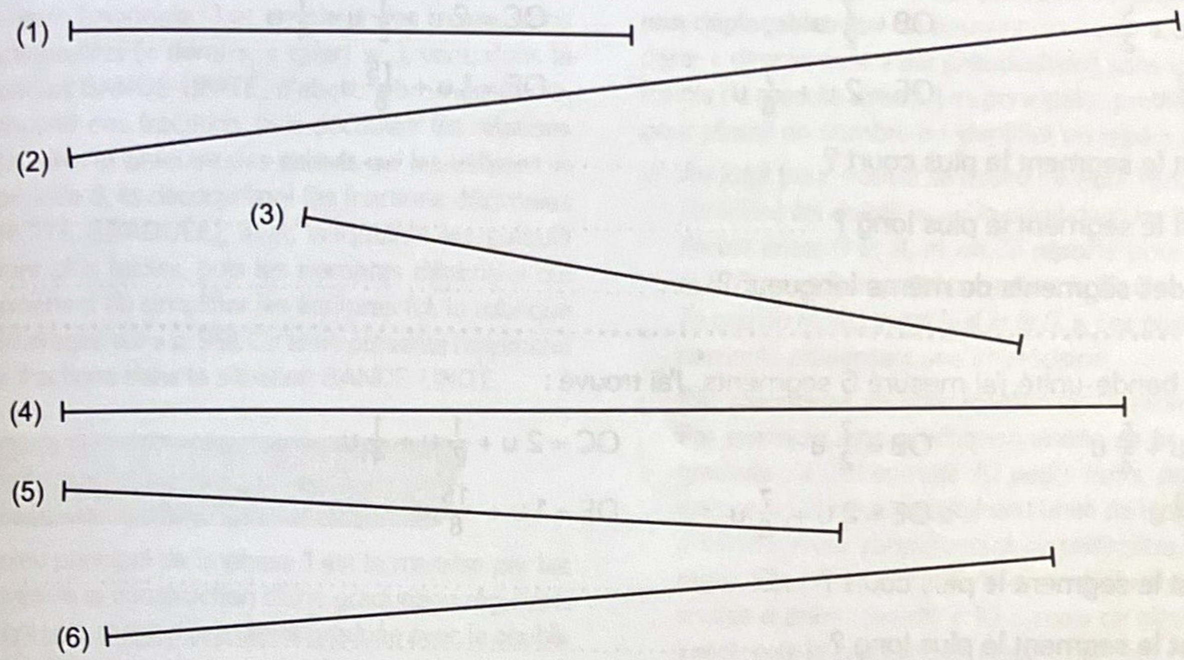
Annexe 2c

MESURES DE SEGMENTS • FEUILLE N° 3

PHASE 2 – MATÉRIEL POUR UN ÉLÈVE

Agrandir à 141 %

Feuille n° 3 Prénom...



Annexe 3a

CONSTRUCTION DE SEGMENTS

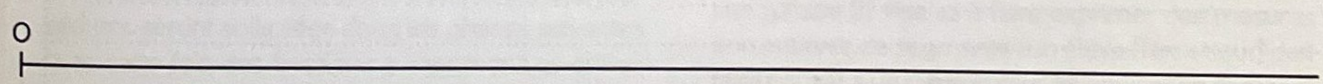
PHASE 3 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES

Agrandir à 141 %

Prénom..

Place sur la demi-droite les points A, B, C, tels que :

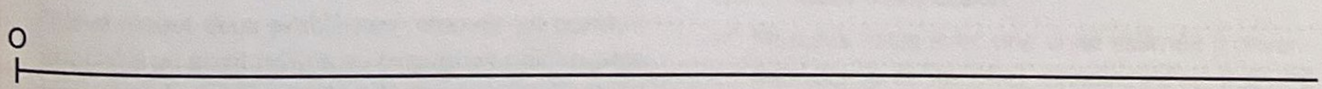
$OA = 1\,u + \frac{5}{4}\,u$ $OB = 2\,u + \frac{2}{4}\,u$ $OC = \frac{5}{2}\,u + \frac{1}{8}\,u$



Prénom..

Place sur la demi-droite les points A, B, C, tels que :

$OA = 1\,u + \frac{5}{4}\,u$ $OB = 2\,u + \frac{2}{4}\,u$ $OC = \frac{5}{2}\,u + \frac{1}{8}\,u$



Annexe 4

COMPARAISON DE LONGUEURS

PHASE 4 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES

Avec la bande-unité, j'ai mesuré 6 segments. J'ai trouvé :

$OA = 1\,u + \frac{5}{2}\,u$ $OB = \frac{7}{2}\,u$ $OC = 2\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u$

$OD = \frac{10}{4}\,u$ $OE = 2\,u + \frac{7}{8}\,u$ $OF = 1\,u + \frac{15}{8}\,u$

Quel est le segment le plus court ? ....

Quel est le segment le plus long ? ....

Y a-t-il des segments de même longueur ? ....

Avec la bande-unité, j'ai mesuré 6 segments. J'ai trouvé :

$OA = 1\,u + \frac{5}{2}\,u$ $OB = \frac{7}{2}\,u$ $OC = 2\,u + \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u$

$OD = \frac{10}{4}\,u$ $OE = 2\,u + \frac{7}{8}\,u$ $OF = 1\,u + \frac{15}{8}\,u$

Quel est le segment le plus court ? ....

Quel est le segment le plus long ? ....

Y a-t-il des segments de même longueur ? ....

Annexe 5

CALCUL AVEC DES FRACTIONS

PHASE 5 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES

Quelles écritures désignent les mêmes longueurs ?

$\frac{4}{8}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{14}{8}$ $\frac{10}{8}$ $\frac{7}{4}$ $2 + \frac{1}{2}$ $1 + \frac{6}{8}$

....

Pour chacune de ces mesures, $\frac{18}{8}$ et $3 + \frac{1}{4}$, trouve d'autres écritures et justifie les égalités trouvées.

....

Quelles écritures désignent les mêmes longueurs ?

$\frac{4}{8}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{14}{8}$ $\frac{10}{8}$ $\frac{7}{4}$ $2 + \frac{1}{2}$ $1 + \frac{6}{8}$

....

Pour chacune de ces mesures, $\frac{18}{8}$ et $3 + \frac{1}{4}$, trouve d'autres écritures et justifie les égalités trouvées.

....

Au CM1, les élèves, qui ont déjà rencontré des nombres à virgule (monnaie…) et employé des expressions fractionnaires (« demi », « quart »…), vont, dans la situation BANDE-UNITÉ, d'abord nommer, écrire, comparer des fractions, puis découvrir les relations entre elles et produire des calculs qui les utilisent. À la période 3, ils découvriront les fractions décimales (DROITE GRADUÉE), avec lesquelles les calculs seront plus faciles, puis les nombres décimaux qui permettent de simplifier les écritures (cf. la rubrique « Éclairages sur » p. 99). Ce texte présente l'approche des fractions dans la situation BANDE-UNITE.

COMMENT RÉALISER UNE GRADUATION RÉGULIÈRE PAR DES ENTIERS ?

L'enjeu principal de la phase 1 est la maitrise par les élèves de la construction d'une graduation régulière. Ils ont une image d'une droite graduée avec le double décimètre, avec deux graduations imbriquées : les centimètres et les millimètres. Par ailleurs, dans leur scolarité, lorsqu'une droite graduée leur était fournie, l'écart entre les nombres était en général respecté. Mais cette **régularité des écarts** n'était pas exigée d'eux, lorsqu'ils plaçaient des nombres sur une droite, afin par exemple de représenter un déplacement.

Cette phase permet ainsi aux élèves de prendre explicitement en compte la régularité des graduations, parce que ce sont eux-mêmes qui ont des nombres entiers à placer « exactement » ; ce qui suppose que la règle graduée qui leur permettrait d'éviter le problème, soit exclue.

Les procédures visées s'appuient notamment sur le report des longueurs et la production de longueurs mesurant la moitié (ou le quart) d'une autre. Ces procédures seront sollicitées dans les phases suivantes avec cette fois des fractions à exprimer. Les élèves comprennent que **les nombres utilisés dans l'activité indiquent aussi bien des repères sur la droite que des écarts entre ces repères**, ces écarts et positons étant mesurés avec une même unité (entre les repères 2 et 6, l'écart est 4).

Procédures et connaissances employées

À partir de deux nombres repères, O (0) et A (4), l'élève résout deux problèmes : trouver un nombre attaché à un point repère, ou trouver un point repère correspondant à un nombre. Cela nécessite l'emploi de calculs additifs ou multiplicatifs liés aux longueurs de segments ou des écarts entre nombres.

Ce problème sollicite la comparaison de **longueurs non déplaçables** (qui ne peuvent donc pas se comparer « directement » par juxtaposition), sans instruments de mesure usuels. Les principales procédures pour placer un nombre ou identifier un repère sont :

- ✔ **Au jugé** pour trouver le milieu : « *Pour mettre 6, j'ai utilisé les doigts.* », « *On a fait avec les mains l'écart entre 0 et 4, et on l'a reporté pour faire le 8. Puis on l'a reporté pour faire le 12. Et le 6, on l'a mis au milieu entre le 4 et le 8.* », ces positionnements présentant une imprécision.
- ✔ **Par mesurage** en utilisant une unité arbitraire. Par exemple, une graduation imitée de la règle graduée : « *J'ai compté 10 petits traits, puis 10 encore.* » L'élève a imaginé une unité de longueur arbitraire, mais s'apparentant au millimètre de la règle. Elle la reporte un nombre de fois qu'elle choisit *a priori* (elle dit « *10* », mais ce n'est pas juste) ; cela la conduit à un positionnement erroné des points.
- ✔ **Par pliage** en deux du segment et report du segment moitié : « *J'ai plié (le segment [0 ; 4]) ; ça a donné la moitié (2). J'ai tracé (reporté) : ça a fait 6. 6 est entre (au milieu) 8 et 4.* »
- ✔ **Par report :** « *La mesure de 0 à 4, ça m'a donné une distance. J'ai reporté cette distance : ça m'a donné 8. De 8 à 12, il y a 4. Je reporte encore une fois : on a 12.* »

COMMENT LES ÉLÈVES EXPRIMENT-ILS DES MESURES NON ENTIÈRES ?

Dans les phases 2, 3, 4, et 5, les élèves produisent et utilisent des fractions. Une situation de communication (phase 2) vise ici à faire exprimer des mesures non entières de segments : un élève (l'émetteur) doit faire trouver à un interlocuteur (récepteur) un segment dans une famille et, pour cela, en exprimer la mesure (non entière) dans son message.

Ces messages peuvent soit contenir la valeur des mesures, soit traduire des actions.

❶ Messages contenant des mesures

Examinons quelques types de mesures produites et leurs modes d'expression :

- ✔ Mesures faites avec une unité estimée (conventionnelle : le centimètre) : certains élèves peuvent avoir discrètement trouvé une règle et mesuré avec, d'autres ont imaginé une longueur approximative : « *Ma bande mesure 20 cm.* » Ce à quoi

PÉRIODE 2 – Quinzaine 4

Questions sur L'APPROCHE DES FRACTIONS

Au CM1, les élèves, qui ont déjà rencontré des nombres à virgule (monnaie…) et employé des expressions fractionnaires (« demi », « quart »…), vont, dans la situation BANDE-UNITÉ, d'abord nommer, écrire, comparer des fractions, puis découvrir les relations entre elles et produire des calculs qui les utilisent. À la période 3, ils découvriront les fractions décimales (DROITE GRADUÉE), avec lesquelles les calculs seront plus faciles, puis les nombres décimaux qui permettent de simplifier les écritures (cf. la rubrique « Éclairages sur » p. 99). Ce texte présente l'approche des fractions dans la situation BANDE-UNITE.

COMMENT RÉALISER UNE GRADUATION RÉGULIÈRE PAR DES ENTIERS ?

L'enjeu principal de la phase 1 est la maitrise par les élèves de la construction d'une graduation régulière. Ils ont une image d'une droite graduée avec le double décimètre, avec deux graduations imbriquées : les centimètres et les millimètres. Par ailleurs, dans leur scolarité, lorsqu'une droite graduée leur était fournie, l'écart entre les nombres était en général respecté. Mais cette **régularité des écarts** n'était pas exigée d'eux, lorsqu'ils plaçaient des nombres sur une droite, afin par exemple de représenter un déplacement.

Cette phase permet ainsi aux élèves de prendre explicitement en compte la régularité des graduations, parce que ce sont eux-mêmes qui ont des nombres entiers à placer « exactement » ; ce qui suppose que la règle graduée qui leur permettrait d'éviter le problème, soit exclue.

Les procédures visées s'appuient notamment sur le report des longueurs et la production de longueurs mesurant la moitié (ou le quart) d'une autre. Ces procédures seront sollicitées dans les phases suivantes avec cette fois des fractions à exprimer. Les élèves comprennent que **les nombres utilisés dans l'activité indiquent aussi bien des repères sur la droite que des écarts entre ces repères**, ces écarts et positons étant mesurés avec une même unité (entre les repères 2 et 6, l'écart est 4).

Procédures et connaissances employées

À partir de deux nombres repères, O (0) et A (4), l'élève résout deux problèmes : trouver un nombre attaché à un point repère, ou trouver un point repère correspondant à un nombre. Cela nécessite l'emploi de calculs additifs ou multiplicatifs liés aux longueurs de segments ou des écarts entre nombres.

Ce problème sollicite la comparaison de **longueurs non déplaçables** (qui ne peuvent donc pas se comparer « directement » par juxtaposition), sans instruments de mesure usuels. Les principales procédures pour placer un nombre ou identifier un repère sont :

- ✔ **Au jugé** pour trouver le milieu : *« Pour mettre 6, j'ai utilisé les doigts. », « On a fait avec les mains l'écart entre 0 et 4, et on l'a reporté pour faire le 8. Puis on l'a reporté pour faire le 12. Et le 6, on l'a mis au milieu entre le 4 et le 8. »*, ces positionnements présentant une imprécision.
- ✔ **Par mesurage** en utilisant une unité arbitraire. Par exemple, une graduation imitée de la règle graduée : *« J'ai compté 10 petits traits, puis 10 encore. »* L'élève a imaginé une unité de longueur arbitraire, mais s'apparentant au millimètre de la règle. Elle la reporte un nombre de fois qu'elle choisit *a priori* (elle dit *« 10 »*, mais ce n'est pas juste) ; cela la conduit à un positionnement erroné des points.
- ✔ **Par pliage** en deux du segment et report du segment moitié : *« J'ai plié (le segment [0 ; 4]) ; ça a donné la moitié (2). J'ai tracé (reporté) : ça a fait 6. 6 est entre (au milieu) 8 et 4. »*
- ✔ **Par report :** *« La mesure de 0 à 4, ça m'a donné une distance. J'ai reporté cette distance : ça m'a donné 8. De 8 à 12, il y a 4. Je reporte encore une fois : on a 12. »*

COMMENT LES ÉLÈVES EXPRIMENT-ILS DES MESURES NON ENTIÈRES ?

Dans les phases 2, 3, 4, et 5, les élèves produisent et utilisent des fractions. Une situation de communication (phase 2) vise ici à faire exprimer des mesures non entières de segments : un élève (l'émetteur) doit faire trouver à un interlocuteur (récepteur) un segment dans une famille et, pour cela, en exprimer la mesure (non entière) dans son message.

Ces messages peuvent soit contenir la valeur des mesures, soit traduire des actions.

❶ Messages contenant des mesures

Examinons quelques types de mesures produites et leurs modes d'expression :

- ✔ Mesures faites avec une unité estimée (conventionnelle : le centimètre) : certains élèves peuvent avoir discrètement trouvé une règle et mesuré avec, d'autres ont imaginé une longueur approximative : *« Ma bande mesure 20 cm. »* Ce à quoi le récepteur répond, sans indiquer de segment réponse : *« 20 cm ce n'est pas précis ; nous n'avons pas de règle : impossible de trouver. »* D'autres utilisent implicitement une unité : *« Plie ta bande de papier jusqu'à ce que ça fasse à peu près 5. Mesure de 5 en 5 jusqu'au bout et tu verras le nombre que ça fera. »*

- ✔ Mesures imprécises : *« Il faut mettre des petites bandes et un peu plus grand que la moitié. »* Les deux unités identifiées sont bien apparentes ; la partie restante est évaluée de façon évasive. Le récepteur rétorque : *« Elle n'a pas pu me faire trouver parce qu'elle a mal fait son message. »* Mais il ne propose aucun segment réponse.
- ✔ Mesures faites à l'aide de la bande-unité, mais avec un mesurage de la partie restante imprécis : *« Une unité plus une unité moins un petit pli. »* Cet élève traduit le huitième par *« un petit pli »* qu'il soustrait Le récepteur remarque : *« C'est assez difficile à comprendre. »*
- ✔ Mesures fausses : des élèves ont proposé *« une unité et un quart »* (au lieu d'un huitième), un autre : *« deux unités et un quart »* (au lieu d'un demi)…
- ✔ Mesures reposant sur des confusions comme entre « plié en trois » et « plié trois fois » :
  « Mon segment fait deux fois la bande, et si on le plie en trois on trouve le reste. » $\boxed{1+1+\frac{1}{8}}$
- ✔ Mesures correctes utilisant des termes (« *demi* ») ou des écritures fractionnaires (« $\frac{1}{2}$ »). Les messages produits sont explicites.

❷ Messages traduisant une suite de « gestes » à reproduire

- ✔ *« Pour trouver mon segment, il suffit de plier ta bande de papier et de faire cinq traits sur le segment. Aide-toi de ta bande de papier. »* $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$
- ✔ *« Mon segment fait deux fois la bande blanche, puis je plie ma bande en deux. »* $\boxed{1+1+\frac{1}{2}}$
- ✔ *« Avec la bande, mesure le segment. Fais-y un trait puis plie-la en deux. Fais un trait, et plie-la en quatre. Normalement, c'est fini. ».* $\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$
- ✔ *« Mon segment, il faut le plier une fois ; et on le reporte 3 fois. Après on le replie encore une fois et on le reporte une fois. En général, c'est bon. »* $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$
- ✔ *« Mon segment fait trois bonds pliés en deux et un bond plié en quatre. »* $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$
- ✔ *« Je prends ma bande et je l'étale sur mon segment à la première lettre. Je mets un point jusqu'où va ma bande et je refais la même chose, sauf que là, je pars de mon point que j'ai mis après. Je plie ma bande en trois* (trois fois ?) *et ça arrive à la lettre du bout. »* $\boxed{1+1+\frac{1}{8}}$
- ✔ *« Mon segment est : 1 fois la moitié, 1 fois entière, et la moitié plus un huitième. »* $\boxed{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}$

Quels moyens pour favoriser l'émergence des connaissances à travers les problèmes ?

Plusieurs choix didactiques contribuent à faire mobiliser les connaissances visées, tout en évitant l'intrusion d'éléments susceptibles de les parasiter.

- ✔ La bande-unité est assez longue (10 cm), car si elle était trop petite et donc difficile à plier, lors de la mesure, l'élève se contenterait d'une valeur entière en la reportant simplement, sans pouvoir exprimer le résidu de façon précise.
- ✔ La longueur d'un segment n'est pas un multiple de la longueur de la bande-unité (car alors la mesure serait entière).
- ✔ Le rapport entre la longueur du résidu (après le report d'un nombre entier de fois de la bande) et celle de la bande-unité est aussi déterminant : si la longueur du résidu est très petite ou très proche de celle de la bande, des élèves peuvent soit la négliger, soit la confondre avec l'unité.
- ✔ Enfin, les bandes-unités ont la même longueur (c'est celle de l'unité commune), mais elles ont des largeurs différentes, afin que cette dimension ne puisse pas être prise comme une petite unité complémentaire (cette petite unité pouvant alors remplacer le pliage de la bande).

QUELLES FONCTIONS DES MISES EN COMMUN ?

Expliciter les désaccords et les imprécisions

Dans une situation de communication, des désaccords peuvent subsister. En effet, de nombreux messages inadaptés sont bien identifiés comme tels par les récepteurs, mais ceux-ci se contentent de les déclarer non valides ou incompréhensibles sans préciser pourquoi : *« Ce n'est pas ça qu'il fallait écrire, alors je ne peux rien faire. »* Des mesures peuvent être exactes mais mal décodées : *« Deux unités plus le demi car d'une. »* (ce à quoi le récepteur répond :

« Je ne comprends pas ce que ça veut dire "plus le demi car d'une". »)

Par ailleurs des messages adaptés peuvent ne pas avoir été compris correctement par les récepteurs. Il revient à l'enseignant, lors de la mise en commun, de faire exprimer publiquement les raisons de ces insuffisances. Les élèves auteurs de ces messages imprécis peuvent alors être en mesure de reformuler leur message ou de trouver les rectifications nécessaires à faire.

Faire valider les solutions

Il est aussi important de ne pas en rester à un accord entre émetteur et récepteur : on ne peut pas exclure le cas où un message inadapté conduise à la réussite suite à deux erreurs qui se compensent. Valider les solutions suppose en effet d'examiner les moyens employés par les élèves pour trouver ces solutions et de prouver qu'ils sont acceptables.

Améliorer les formulations

Les différentes expressions d'une même mesure pourront être comparées et **conduire à la notation fractionnaire** lors de la reprise : dans un premier temps, les messages peuvent ne pas comporter d'écriture fractionnaire chiffrée ; ce sont les phases 4 et 5 et les entrainements à la mesure suivant cette situation qui permettront aux élèves d'utiliser sans difficulté la notation introduite (par exemple : $1\,u + \frac{3}{4}\,u$).

Les formulations des élèves sont imparfaites. L'enseignant les fait préciser, reformuler. Il peut (sans introduire d'éléments nouveaux) aider l'élève à s'exprimer en lui fournissant parfois les mots ou expressions qui lui manquent, tout en restant proche des siennes. Il permet, par son questionnement, à l'élève de progresser dans ses explications, en améliorant la précision de l'expression.

Certains messages, plus centrés sur l'accomplissement d'actions, doivent être traduits en mesure du segment.

QUELLE ÉVOLUTION DES CONNAISSANCES ?

Premiers problèmes contextualisés

Les problèmes traités jusqu'à la phase 3 font travailler les élèves sur le support d'une droite où sont placés des points ; et au moyen d'une bande-unité, Ils effectuent le mesurage de longueurs. Les problèmes s'appuient alors sur un **contexte matériel**. Les activités correspondant aux phases 4 et 5 de la situation ont, de ce point de vue, des caractéristiques différentes.

Problème où le contexte est seulement évoqué

En phase 4, les élèves doivent comparer des segments dont les mesures sont exprimées par des écritures fractionnaires (*« $OA = 1\,u + \frac{5}{2}\,u$… »*) qui font encore référence à la bande-unité (u), mais **ils ne disposent plus de cette bande-unité, ni de demi-droite tracée ou de segments matérialisés.**

Le problème porte bien sur le même **contexte**, mais cette fois il est seulement **évoqué**. Le mesurage n'est plus possible, et les réponses aux problèmes ne peuvent donc plus s'obtenir comme précédemment.

Passage à un problème décontextualisé

En phase 5, les élèves doivent trouver des fractions équivalentes (de dénominateurs différents). Le **contexte** est maintenant **absent**, La question porte exclusivement sur des nombres. Certains élèves transforment les écritures en cherchant en premier lieu la partie entière, les parties restantes étant donc inférieures à 1 :

- ✔ si les parties entières sont différentes, le plus grand nombre est celui qui a la plus grande partie entière ;
- ✔ si elles sont égales, on compare les parties restantes.

D'autres élèves peuvent évoquer des longueurs, tout en effectuant des calculs sur des fractions sans unité :

- ✔ dans la transformation des écritures ;
- ✔ dans la méthode à adopter pour comparer.

Pour certains élèves qui mêleraient dans les calculs unités et fractions, l'enseignant peut suggérer de revenir au contexte des longueurs.

Conclusion

Dans cette situation, les élèves ont produit des connaissances nouvelles : les fractions sont devenues des objets de calcul ; ils ont montré qu'ils pouvaient transformer ces écritures (notamment passer de l'écriture d'une fraction, $\frac{15}{8}$, à une écriture additive, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, et inversement) ; ils utilisent aussi ces transformations d'écritures pour comparer les nombres associés.