Eléments disciplinaires :

a) Grandeurs proportionnelles

Dans l'exercice 1, la consommation d'essence est proportionnelle au nombre de km parcourus. On passe du nombre de km à la consommation en multipliant par 0,05 L/km.

Définition : On dit qu'une grandeur Y est proportionnelle à une grandeur X s'il existe un nombre (réel non nul) k tel que : Y = $\mathbf{k} \times \mathbf{X}$. Le nombre k est appelé coefficient de proportionnalité.

Remarque : on peut également dire que la grandeur X est proportionnelle à la grandeur Y avec un coefficient de proportionnalité égal à 1/k. Pour l'exercice 1, on peut multiplier par 20km/L pour passer de la consommation au nombre de km.

b) Suites de nombres proportionnelles

Exemple : Les deux suites de nombres (4, 2, 5, 6, 7) et (24, 12, 30, 36, 42) sont proportionnelles parce qu'on peut passer de chaque terme de la 1$^{\text{ère}}$ au terme correspondant de la 2$^{\text{ème}}$ en multipliant par 6.

Une autre façon de le voir avec des divisions : 24/4 = 12/2 = 30/5 = 36/6 = 42/7 (= 6) : les suites sont proportionnelles car les rapports entre 2 termes correspondants sont tous égaux.

Définition : Deux suites de nombres sont dites proportionnelles si on peut passer de chaque terme de la première suite au terme correspondant de la deuxième suite en multipliant par un même nombre non nul.
On dira qu'on a un tableau de proportionnalité si on peut passer d'une ligne à l'autre en multipliant par un nombre non nul.

Dans l'exemple cela donne le tableau suivant :

Suite 1	4	2	5	6	7
Suite 2	24	12	30	36	42

× 6

Propriété : Si les rapports de deux termes correspondants sont tous égaux, alors les suites sont proportionnelles.

c) Propriétés de linéarité

Reprenons le tableau de proportionnalité ci-dessus, en faisant apparaître les propriétés de linéarités :

× ½

Suite 1	4	2	5	6	7
Suite 2	24	12	30	36	42

× ½

Propriété : Lorsque deux grandeurs X et Y sont proportionnelles, le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité. Autrement dit :

1) Si aux valeurs x et x' de X correspondent respectivement les valeurs y et y' de Y, alors à la somme ($x + x'$) correspond ($y + y'$)
C'est la *linéarité additive.*

x	x'	$x + x'$	$m.x$
y	y'	$y + y'$	$m.y$

2) Si à x correspond y, alors à $m.x$ correspond $m.y$. C'est la *linéarité multiplicative.*

Pourcentages

- Calculer t% de x : revient à multiplier x par t/100. Cela veut aussi dire que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

100	x
t	t% de x

- Augmenter ou diminuer x de t% : revient à multiplier x par (1 $\pm$ t/100).
- Le pourcentage d'augmentation ou de diminution d'une grandeur peut toujours être obtenu par les formules suivantes :

$$\left(\frac{VALEUR_{finale} - VALEUR_{initiale}}{VALEUR_{initiale}}\right)\times 100$$ dans le cas d'une **augmentation**

$$\left(\frac{VALEUR_{initiale} - VALEUR_{finale}}{VALEUR_{initiale}}\right)\times 100$$ dans le cas d'une **diminution**

[le numérateur est toujours positif.]

Ratio : Lorsqu'on verse une portion de sirop pour 7 portions d'eau, on fait un mélange sirop/eau dans le ratio 1 :7.
Si on ajoute deux portions de sucre, on aura fait un mélange sirop/eau/sucre dans le ratio 1 :7 :2.
Le sucre représente alors une proportion de 2/10=2/(1+7+2) du mélange.

Tous les problèmes d'échelle sont des problèmes de proportionnalité.

Sur un plan, toutes les mesures de distances sont proportionnelles aux mesures correspondantes sur le terrain. Ainsi, tout problème peut être traduit par un tableau de proportionnalité.
Mais attention : les **unités doivent être les mêmes**.

Longueur sur le plan en **cm**	1 (1)	7 (3)
Longueur réelle en **cm**	15 000 (2)	105 000 (4)

La 1ère colonne (cases (1) et (2)) permet de noter l'échelle ; ici $\frac{1}{15\,000}$.
La case (3) traduit le fait que la mesure sur la carte est de 7 cm.
La case (4) traduit le fait que la mesure réelle est de 105 000 cm.

A partir de là, on peut résoudre tout problème d'échelle.

Trois types possibles:

1° On connaît l'échelle et la mesure sur le plan : on peut remplir les cases 1, 2 et 3

2° On connaît l'échelle et la mesure réelle : on peut remplir les cases 1, 2 et 4

3° On connaît la mesure sur le plan et la mesure réelle : on peut remplir les cases 3, 4 et ...1.

Dans chacun de ces cas **une seule valeur à déterminer dans un tableau de proportionnalité**.

Pour l'enseignement :

Les procédures de résolution d'une situation de proportionnalité à l'école primaire :

- Utilisation de la linéarité additive en lien avec les contextes (si j'utilise 5L pour 100km et 2L pour 40km j'utilise 7L pour 140km)
- Utilisation de la linéarité multiplicative en lien avec les contextes (pour faire 3 fois plus de crêpes il faut 3 fois plus d'œufs)
- Retour à l'unité (calcul pour un élément de l'une des grandeurs (1kg par ex))
- Recherche d'un coefficient de proportionnalité (0,05L/km)
- Produit en croix
- En 6$^{\text{ème}}$ surtout : utilisation d'un graphique avec des points alignés.

Variables didactiques mises en jeu dans les exercices :

La présentation de l'énoncé (texte, tableau, …)
Les nombres en jeu : leur nature (entier/décimaux/fraction), taille (grands nombres), relations opératoires simples (double/moitié, … : pour utiliser les linéarités)
La taille des suites considérées
La nature des coefficients de proportionnalité (entier/décimal/fraction)
Le cadre de résolution : géométrique (avec des agrandissements/réduction ou des échelles) ; graphiques ; numériques (avec des pourcentages) ; …
Le type de problème donné (voir la typologie ci-dessous)

Typologie des problèmes :

- reconnaissance d'une situation de proportionnalité
- Problème de quatrième proportionnelle
- Problème de comparaison de proportions (voir l'exercice avec le jus d'orange dilué)
- Problème de passage d'un cadre à l'autre (grandeur / numérique / graphique)

Lieux de difficultés pour les élèves :

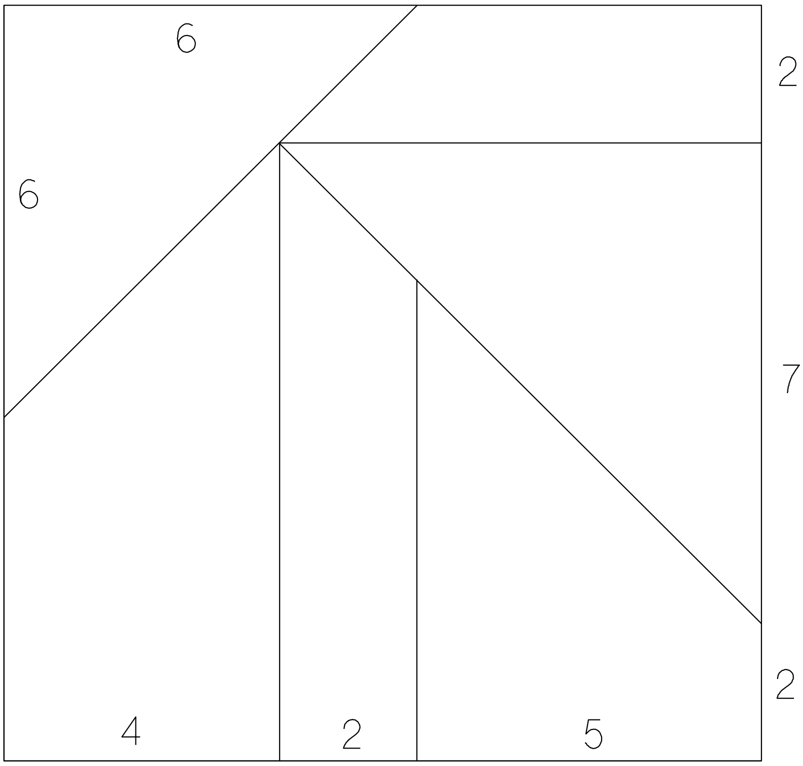
- Identifier les grandeurs en relation dans une situation de proportionnalité
- Reconnaître une situation de proportionnalité
- Choisir une procédure de résolution adaptée (voir ci-dessus les procédures)
- Mettre en œuvre une procédure de résolution
- Les situations de proportionnalité font souvent apparaître une « diminution » ou une « augmentation ». Or pour les élèves en début d'apprentissage, ces termes font référence à l'addition et la soustraction ; ce qui constitue un obstacle à la reconnaissance d'une situation de proportionnalité. Ci-dessous un jeu que nous appellerons « Puzzle de Brousseau » pour aider à lutter contre cette conception erronée.

Le Puzzle du Brousseau :

A tester si possible avec votre entourage (il faut au moins 2 joueurs, des variantes doivent être possibles avec 2 joueurs à distance, en utilisant un quadrillage) :

Voici un puzzle (Tangram) formé de figures géométriques (que l'on nommerait avec des élèves).

b)



Les mesures sont données en minipieds (mnp en abrégé). Le minipied est une unité de mesure de longueur utilisée à Lilliput.

Le but du jeu est de tracer (à la règle - non graduée - et au compas) un puzzle semblable, plus grand que le modèle, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre minipieds sur le modèle devra mesurer sept minipieds sur votre reproduction.

Mais attention, il faut que les joueurs se répartissent les pièces à construire puis les construisent chacun de leur côté. Les joueurs rassemblent ensuite les pièces et ils auront gagné si le puzzle agrandi se reconstruit bien.

Les réponses :
La situation d'agrandissement du tangram peut être représentée dans un tableau :

Mesures prises sur le petit tangram (en mnp)	4	2	5	6	7
Mesures prises sur le grand tangram (en mnp)	7	3,5	8,75	10,5	12,25

$\times$ **1,75**

On dit que la longueur L des côtés des figures du grand tangram est proportionnelle à la longueur ℓ des côtés des figures du petit tangram et on a la relation : **L = 1,75 × ℓ**