

I - Division euclidienne

A - Multiples et diviseurs

Définition

Si $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel alors **a est un multiple de b** ou **a est divisible par b** ou **b est un diviseur de a** ou **b divise a** .

Exemple : 1 274 est-il un multiple de 49 ? 1 974 est-il divisible par 84 ?

$1\,274 \div 49 = 26$ donc $1\,274 = 49 \times 26$.
1 274 est donc un multiple de 49 (et de 26).
On dit également que :

- **1 274 est divisible par 49** (et par 26) ;
- **49 est un diviseur de 1 274** (et 26 aussi) ;
- **49 divise 1 274** (26 divise aussi 1 274).

$1\,974 \div 84 = 23,5$.
23,5 n'est pas un entier naturel donc 1 974 n'est pas divisible par 84.
On peut dire également que :

- 84 n'est pas un diviseur de 1 974 ;
- 1 974 n'est pas un multiple de 84.

B - Division euclidienne

Définition

a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ r \end{array}$$

Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ avec $r < b$ où q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de la division euclidienne.

Exemple : a. Effectue la division euclidienne de 183 par 12.

b. $278 = 6 \times 45 + 8$: quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

a. $\begin{array}{r} 183 \overline{) 12} \\ 63 \overline{) 15} \\ 3 \end{array}$ On peut donc écrire :
 $183 = 12 \times 15 + 3$
avec $3 < 12$.

b. $8 < 45$ mais $8 > 6$ donc l'égalité représente la division euclidienne de 278 par 45 mais ne peut pas représenter celle de 278 par 6.

II - PGCD de deux entiers naturels

Définition

Le **PGCD de deux entiers naturels non nuls** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Remarques :

- a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.
- a et b étant des entiers naturels, $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a)$.

Cas particulier : n étant un entier naturel non nul, $\text{PGCD}(n ; 0) = n$

Théorème

a et b sont deux entiers naturels non nuls

Si $a \geq b$ alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$.

Exemple 1 : Détermine $\text{PGCD}(189 ; 693)$ par la **méthode des soustractions successives**.

- $693 > 189$ et $693 - 189 = 504$ donc $\text{PGCD}(693 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 504)$.
 - On cherche maintenant $\text{PGCD}(189 ; 504)$: on applique à nouveau la propriété.
 $504 > 189$ et $504 - 189 = 315$ donc $\text{PGCD}(504 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 315)$.
 - On poursuit avec 189 et 315 et ainsi de suite :
 $315 > 189$ et $315 - 189 = 126$ donc $\text{PGCD}(315 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 126)$.
 - $189 > 126$ et $189 - 126 = 63$ donc $\text{PGCD}(189 ; 126) = \text{PGCD}(126 ; 63)$.
- Or 63 est un diviseur de 126 ($126 = 63 \times 2$) donc $\text{PGCD}(126 ; 63) = \text{PGCD}(189 ; 693) = 63$.

Théorème

a et b sont des entiers naturels non nuls

Si $a \geq b$ alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

Remarque : Dans cet algorithme, appelé aussi « algorithme d'Euclide », le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple 2 : Trouve le PGCD de 782 et de 136 par la **méthode des divisions successives**.

- On effectue la division euclidienne de 782 par 136 : $782 = 136 \times 5 + 102$.

Donc $\text{PGCD}(782 ; 136) = \text{PGCD}(136 ; 102)$.

- On cherche maintenant $\text{PGCD}(136 ; 102)$: on applique à nouveau la propriété.

On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : $136 = 102 \times 1 + 34$.

Donc $\text{PGCD}(136 ; 102) = \text{PGCD}(102 ; 34)$.

- On continue avec $\text{PGCD}(102 ; 34)$.

On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : $102 = 34 \times 3$.

Le reste est égal à 0 donc **$\text{PGCD}(782 ; 136) = 34$** qui est le dernier reste non nul.

$$\begin{array}{r} 782 \overline{) 136} \\ 102 \overline{) 136} \\ \hline 34 \overline{) 102} \\ 34 \overline{) 102} \\ \hline 0 \overline{) 34} \\ 0 \overline{) 34} \\ \hline \end{array}$$

III - Fractions irréductibles

Définition

Deux **entiers naturels non nuls sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1. Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

- $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.

- $91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$

Les diviseurs de 91 sont : **1** ; 7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 91 ainsi le PGCD de 45 et 91 est égal à **1**.

On en déduit donc que **45 et 91 sont premiers entre eux**.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux **divisibles par 2**, ils ont donc un diviseur commun autre que 1 : leur **PGCD n'est pas égal à 1**. Ainsi **426 et 568 ne sont pas premiers entre eux**.

Définition

Une **fraction est irréductible** quand son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple 3 : Rends les fractions $\frac{75}{105}$; $\frac{396}{360}$ et $\frac{136}{782}$ irréductibles.

75 et 105 sont des multiples de 5 donc, on obtient :

$$\frac{75}{105} = \frac{15 \times 5}{21 \times 5} = \frac{15}{21}$$

15 et 21 sont des multiples de 3 donc, on obtient :

$$\frac{15}{21} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{5}{7}$$

Ainsi $\frac{75}{105} = \frac{5}{7}$.

On écrit 396 et 360 sous la forme de produits de facteurs les plus petits possibles.

$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \text{ donc :}$$

$$\frac{396}{360} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 11}{2^3 \times 3^2 \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$$

$$\text{Ainsi } \frac{396}{360} = \frac{11}{10}.$$

Le PGCD de 136 et 782 est 34. 34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 782.

Les quotients obtenus sont nécessairement premiers entre eux.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 \div 34}{782 \div 34} = \frac{4}{23}$$

$$\text{Ainsi } \frac{136}{782} = \frac{4}{23}.$$