ARITHMÉTIQUE- Les bases à connaître

Partie 1 : division euclidienne

Cf CM Problèmes et opérations.

Partie 2 : être multiple de, être divisible par, être un diviseur de

Les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... constituent un ensemble infini, noté et appelé ensemble des nombres **entiers naturels.**

Définition

Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier naturel q tel que : **a = b × q** .

Cela revient à dire que dans la division euclidienne de a par b, le reste est nul.

On dit que b est un diviseur de a, de même q est un diviseur de a

Dans le cas où b est non nul, on dit que a est divisible par b.

L'égalité 55 = 11 ×5

permet de dire que

11 est un diviseur de 55

55 est un multiple de 11,

et 55 est divisible par 11**.**

Remarques : *tout entier naturel est multiple de 1 : n = 1 × n*

tout entier naturel est multiple de lui-même

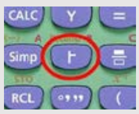
0 est multiple de tout entier naturel 0 = n × 0

Tout entier naturel est un diviseur de 0

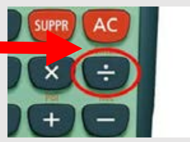
1 a un seul diviseur lui-même

Pour savoir si un nombre entier a est divisible par un nombre entier non nul b :

Méthode 1 : on effectue la division euclidienne de a par b.
A la main ou avec la calculatrice.
Si le reste est nul, alors a est divisible par b.
Sinon, a n'est pas divisible par b.



Méthode 2 : on effectue la division décimale de a par b.
A la main ou avec la calculatrice
Si le quotient décimal exact est un nombre entier, alors a est divisible par$b$.
Sinon, a n'est pas divisible par b.



Méthode 3 : mentalement, on cherche si il existe un nombre entier k tel que $k \times b = a$, en s'appuyant sur les tables de multiplication et les propriétés de la multiplication, ou sur les critères de divisibilité (qui seront revus plus loin dans cette fiche)

Une méthode pour dresser la liste de tous les diviseurs d'un nombre entier n:
Il suffit de tester, pour chacun des nombres entiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ si ce nombre est un diviseur de n
Par exemple, pour lister les diviseurs de 15 :
1 est un diviseur de 15 ($15 = 1 \times 15$, on obtient donc déjà deux diviseurs de 15 : 1 et 15
2 n'est pas un diviseur de 15
3 est un diviseur de 15 ($15 = 3 \times 5$, on obtient donc deux autres diviseurs de 15 : 3 et 5
Inutile de tester davantage, puisque 4 est supérieur à $\sqrt{15}$.

Besoin d'un exemple en vidéo ? https://www.youtube.com/watch?v=jteZZBzyai8

Remarque : une autre méthode, avantageuse quand on a des nombres plus grands, sera présentée dans la partie 3.

Critères de divisibilité à connaître

Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, ou 8.	13 554 et 990 sont divisibles par 2.
Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.	855 et 670 sont divisibles par 5.
Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.	471 est divisible par 3 : 4+7+1=12 et 12 est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.	441 est divisible par 9 : 4+4+1=9 459 est divisible par 9 : 4+5+9=18 et 18 est divisible par 9.
Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4.	1 316 est divisible par 4 car 16 est divisible par 4. 1314 n'est pas divisible par 4 car 14 n'est pas divisible par 4.
Un nombre est divisible par 10 si et seulement si son chiffre des unités est zéro.	13550 est divisible par 10. 13 005 ne l'est pas.

Partie 3 : nombres premiers

Définition
***Un nombre entier naturel* a *est premier dans le seul cas où* a *admet exactement deux diviseurs (distincts))1 et lui-même*.**

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont des nombres premiers car ils admettent exactement deux diviseurs (1 et eux-mêmes).
4 n'est pas un nombre premier car il admet un autre diviseur que 1 et lui-même (le nombre 2).
5 112 n'est pas un nombre premier car il admet un autre diviseur que 1 et lui-même (le nombre 3).

Remarques :
Le nombre 1 n'est pas premier.
2 est le seul nombre premier pair.
L'ensemble des nombres premiers est infini.

A connaître : les nombres premiers jusqu'à 40 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Méthode pour déterminer si un entier est un nombre premier
Pour décider si un nombre est premier, il suffit de tester s'il est divisible par l'un des nombres premiers qui lui sont inférieurs.
Règle (admise) : en pratique, il suffit de tester s'il est divisible par un des nombres premiers inférieurs à sa racine carrée (« Crible d'Eratosthène »).

Exemples :

a = 103 $10^2 < 103 < 11^2$ donc $10 < \sqrt{103} < 11$
Il suffit de tester chacun des nombres premiers inférieurs à 11 :
Puisque 103 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, 103 est premier.

b = 323 $17^2 < 103 < 18^2$ donc $17 < \sqrt{323} < 18$
Testons chacun des nombres premiers inférieurs à 18 :
323 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13.
Par contre il est divisible par 17. Donc 323 n'est pas un nombre premier.

Partie 4 : décomposition en produits de facteurs premiers

<u>Théorème admis</u>: Tout nombre entier a supérieur ou égal à 2, peut être décomposé de manière <u>unique</u> en produit de facteurs de nombres premiers.

Règle pratique : pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers, une méthode systématique consiste à le diviser successivement (et autant de fois que possible) par les nombres premiers successifs.

Ex : pour décomposer 882.

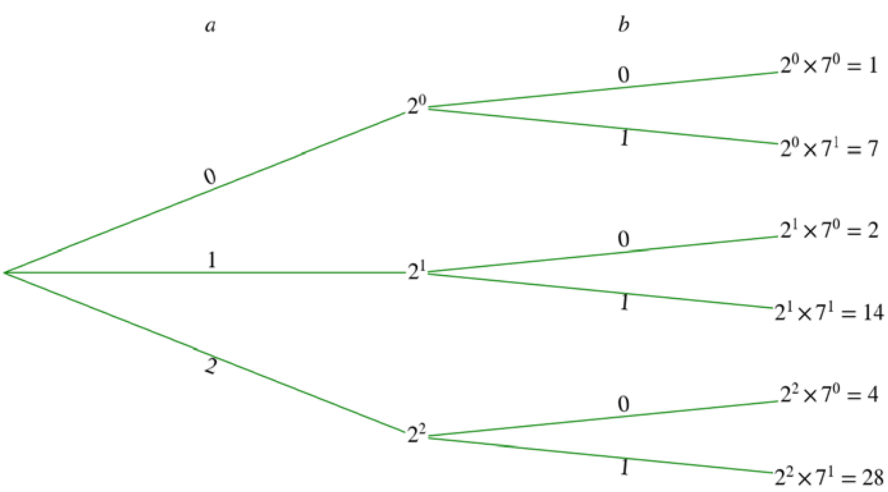
882	on divise par **2**
on obtient **441**	441 n'est pas divisible par 2 on divise par **3**
on obtient **147**	on divise par **3**
on obtient **49**	49 n'est divisible ni par 3, ni par 5 on divise par **7**
on obtient **7**	on divise par **7**
on obtient **1**	Fin de l'algorithme.

Conclusion : $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$

Besoin d'un exemple en vidéo ? https://www.youtube.com/watch?v=BlGaIqNz_pk

<u>Méthode pour déterminer la liste des diviseurs d'un nombre entier à partir de sa décomposition en produits de facteurs premiers</u>. Par exemple, comment dresser la liste des diviseurs de 28.

On effectue la décomposition en facteurs premiers de 28, et on en déduit les décompositions en facteurs premiers des diviseurs de 28.
La décomposition en facteurs premiers de 28 est : $28 = 2^2 \times 7$.
Les diviseurs de 28 sont donc les nombres dont la décomposition en facteurs premiers est de la forme $2^a \times 7^b$**, où** a **vaut 0, 1 ou 2, et où** b **vaut 0 ou 1. On peut énumérer tous les nombres qui ont cette forme-là (par exemple à l'aide d'un arbre) ; on obtient alors la liste des diviseurs de 28 : 1, 7, 2, 14, 4 et 28.**



Partie 5 : applications (fractions irréductibles, recherche de plus petit multiple commun, de plus grand diviseur commun)

Le PGCD de deux nombres entiers, c'est leur plus grand diviseur commun.
Le PPCM de deux nombres entiers, c'est leur plus petit multiple commun.

Vidéo à regarder :
https://www.youtube.com/watch?v=2bIK1KkQ1k0

Entraînez-vous à calculer le PGCD et le PPCM de 980 et 600 en utilisant la décomposition en facteurs premiers.
Réponse attendue : PGCD 20 et PPCM 29400

Rendre une fraction irréductible, c'est la transformer en une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autres diviseur en commun que 1. On dit alors que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.
Pour rendre une fraction irréductible, on peut :

1. **Commencer par simplifier la fraction par des diviseurs communs « évidents » du numérateur et du dénominateur.**
2. **Décomposer ensuite le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis simplifier au maximum par les facteurs premiers communs.**

Rq : rendre une fraction irréductible revient à simplifier la fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur.