

TD 11 – Résolution de problèmes multiplicatifs et arithmétique

A. Division euclidienne

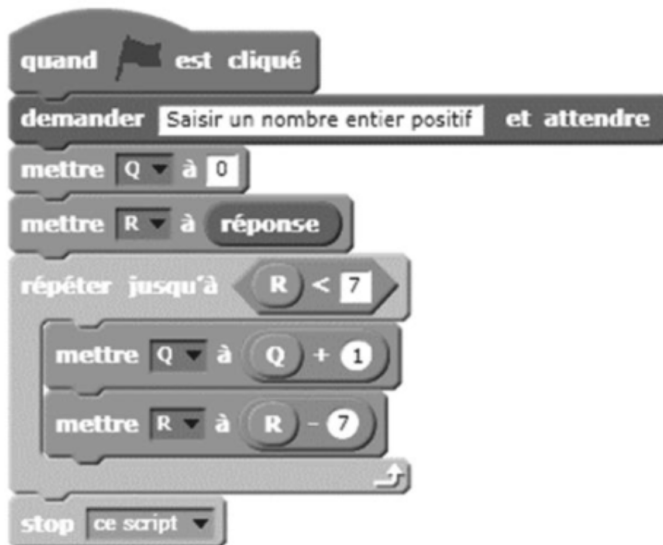
Pour trouver quotient et reste d'une division euclidienne, on peut la poser.

Exemple : division de 598 par 7 :

	Alors le quotient est 85 et le reste est 3. On écrit le résultat de cette division avec une multiplication et une addition : $598 = 7 \times 85 + 3$ On peut en déduire que $7 \times 85 < 598 < 7 \times 86$
--	--

Exercice 1. Poser les divisions euclidiennes de 1789 par 12 et de 540 par 15. Donner quotient et reste ainsi que l'écriture du résultat par l'opération.

Exercice 2. CRPE 2020



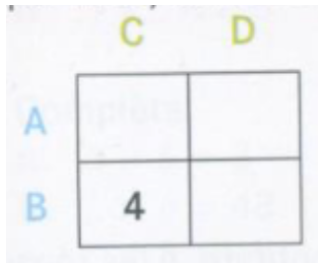
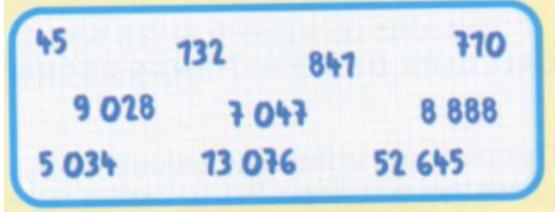
1. Si l'utilisateur saisit le nombre 17, quelles seront les valeurs des variables Q et R en fin d'exécution ?
2. Que représentent, par rapport au nombre saisi par l'utilisateur, les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution ?
3. En déduire les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution lorsque l'utilisateur saisit le nombre 2020.

Exercice 3. On donne $2023 = 24 \times 83 + 31$.

1. Donner le quotient et le reste de la division de $2023 + 7$ par 83.
2. Donner le quotient et le reste de la division de $2023 + 83$ par 83.
3. Donner le quotient et le reste de la division de 2023 par 24 (attention au piège).

B. Multiples, diviseurs

Exercice 4. [Cap Maths, CM2]

a) a. Écris les nombres compris entre 20 et 70 qui sont multiples à la fois de 3 et de 5. b. Écris les nombres compris entre 40 et 80 qui sont multiples à la fois de 2 et de 3.	b) Complète le tableau avec vrai ou faux. Explique à chaque fois ta réponse. <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>de 2</th> <th>de 3</th> <th>de 4</th> <th>de 5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50 est multiple :</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>60 est multiple :</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		de 2	de 3	de 4	de 5	50 est multiple :					60 est multiple :				
	de 2	de 3	de 4	de 5												
50 est multiple :																
60 est multiple :																
c) Complète ce « nombres croisés ». Trouve toutes les possibilités. Chaque nombre s'écrit avec 2 chiffres (un par case) et ne doit pas commencer par 0.  Horizontalement : A. multiple de 5 B. multiple de 2 Verticalement : C. multiple de 4 D. multiple de 3	d)  Parmi ces nombres, trouve ceux qui sont multiples : a. de 2 b. de 5 c. de 10															
e) Complète l'écriture du nombre 475• pour qu'il soit multiple : a. de 2 b. de 5 c. de 10 À chaque fois, trouve toutes les possibilités.	f) Encadre 58 entre deux multiples consécutifs : a. de 4 b. de 5 c. de 7 d. de 10 11 n'est pas un multiple de 4, mais on peut l'encadrer entre deux multiples consécutifs de 4: $8 < 11 < 12$ ou encore $2 \times 4 < 11 < 3 \times 4$.															
g) Peut-on paver exactement un rectangle de 120 cm sur 90 cm avec des carrés tous identiques : a. de 10 cm de côté ? b. de 15 cm de côté ? c. de 18 cm de côté ? Quand c'est possible, trouve le nombre de carrés nécessaires.	h) – Énigme – Nombre 1 : Je suis le plus petit nombre de 3 chiffres qui est à la fois multiple de 2, de 3 et de 5. Nombre 2 : Je suis le plus grand nombre de 3 chiffres qui est à la fois multiple de 2, de 3 et de 5. Quels sont ces nombres ?															

Point lexical : c'est la même chose de dire :

A est multiple de B	A est divisible par B	B est un diviseur de A	B divise A
21 est multiple de 7	21 est divisible par 7	7 est un diviseur de 21	7 divise 21

Exercice 5. Dire le plus de chose possible à partir de $240 = 6 \times 40$.

On pourra démontrer qu'il y a 8 assertions possibles du type ci-dessus !

Exercice 6. CRPE 2021

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. *Définition : Un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple, 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a : $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ qui correspond au double de 6.*

Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »

2. **Affirmation 2 :** « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »

Exercice 7. CRPE 2021

PROGRAMME A

```

quand est cliqué
  demander Entrer un nombre et attendre
  mettre ma variable à réponse
  ajouter à ma variable -4
  mettre ma variable à 3 * ma variable
  ajouter à ma variable 3
  dire regroupe la réponse est ma variable

```

PROGRAMME B

```

quand est cliqué
  demander Entrer un nombre et attendre
  mettre ma variable à 3 * réponse
  ajouter à ma variable -9
  dire regroupe la réponse est ma variable

```

Montrer que le résultat obtenu avec ces programmes est toujours un nombre multiple de 3.

Exercice 8. CRPE 2021 et 2020

Affirmation 1 : « Le nombre 4700001 est un nombre premier », c'est à dire que ses seuls diviseurs sont 1 et 4700001.

Affirmation 2 : « Les nombres 32^{12} et $16^{15} + 3$ sont égaux. »

Affirmation 3 : « 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

Affirmation 4 : « La somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair. »

Affirmation 5 : « La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

Affirmation 6 : « La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs ne peut pas être un nombre premier. »

Exercice 9.

CRPE 2019

1. Pour tout nombre entier n , montrer que $30n + 25$ est divisible par 5.
2. Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier
- Multiplier par 3
- Ajouter 5
- Élever au carré
- Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ

- a. Montrer que ce programme a pour résultat 265 si le nombre entier choisi est 8. Les calculs seront détaillés.
- b. Quel résultat obtient-on si le nombre entier choisi est (-56) ?
- c. Montrer que le résultat de ce programme de calculs, quel que soit le nombre de départ, est divisible par 5.

Exercice 10.

1. a. Soit N un nombre entier compris entre 100 et 999.
 N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
Démontrer que si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4. Par exemple, pour 732, comme 32 est divisible par 4 alors 732 est divisible par 4.
- b. Cette règle fonctionne-t-elle pour la divisibilité par 8, c'est à dire, « Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités d'un nombre N supérieur à 10 est divisible par 8 alors N est divisible par 8 » ?
2. On considère toujours un nombre entier N compris entre 100 et 999 s'écrivant sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
Calculer $N - (a + b + c)$. Démontrer que si $a + b + c$ est divisible par 9, alors N l'est aussi.

Exercice 11.

CRPE 2000

Le service des espaces verts veut border un terrain rectangulaire de 924 m de long sur 728 m de large à l'aide d'arbustes régulièrement espacés. Un arbuste sera planté à chaque angle du terrain. La distance entre deux arbustes doit être mesurée par un nombre entier de mètres.

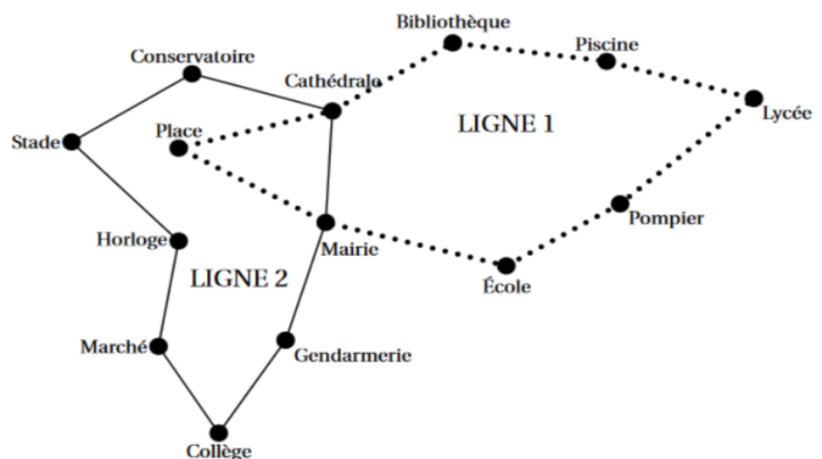
- 1/ Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.
- 2/ Déterminer dans chaque cas le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

Exercice 12.

DNB, Polynésie, 2017

Voici le plan de deux lignes de bus :

C'est à 6 h 30 que les deux bus des lignes 1 et 2 partent de l'arrêt « Mairie » dans le sens des aiguilles d'une montre. Le bus de la ligne 1 met 3 minutes entre chaque arrêt (temps de stationnement compris), tandis que le bus de la ligne 2 met 4 minutes. Tous les deux vont effectuer le circuit complet un grand nombre de fois. Ils s'arrêteront juste après 20 h. Est-ce que les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps ? Si oui, donner tous les horaires précis de ces rencontres.



C. Résolution de problèmes : la division

Exercice 13.

On effeuille une marguerite de 40 pétales en disant : « je t'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout ; je t'aime, un peu, etc. » Par quelle déclaration terminera-t-on ?

1. Résoudre le problème.
2. Les documents 1, 2 et 3 sont constitués par les productions de six élèves de CM2, en réponse au problème ci-dessus.
 - a) Identifier les différents types de procédures utilisées.
 - b) Analyser chaque production (qualités, défauts, erreurs).
 - c) Que proposeriez-vous pour amener les élèves A et D à utiliser une procédure experte ?

DOCUMENT 1

achia (A)

(A)

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 -16 \\
 \hline
 24 \\
 -16 \\
 \hline
 8 \\
 -6 \\
 \hline
 2 \\
 -2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

passionnément

J'ai enlevé 6 pétales de la marguerite quand même je me suis rapproché de la fin et j'ai reculé en disant je t'aime, puis quand je me tombait sur le zéro j'ai écrit ma réponse.

(B)

40 : 6 = 8 + 4

alime

je t'aime
 ② un peu
 ③ beaucoup
 ④ passionnément
 ⑤ à la folie
 ⑥ je t'aime
 ⑦ un peu
 ⑧ beaucoup

Réponse : un petit peu beaucoup

J'ai fait une division comme il restait 4 pétales et que j'ai trouvé 6 et j'ai ajouté 6 + 4 = 8 qui a fait 8. ensuite j'ai dit les phrases jusqu'à la huitième et j'ai trouvé fin.

DOCUMENT 2

Sauron

(C)

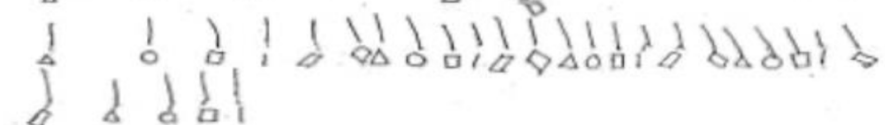
$$\begin{array}{r|l} 40 & 6 \\ 10 & \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$40 : 6 = 5 \text{ et } 10$$

La déclaration est "beaucoup".

J'ai pris les 40 pétalos et les 6 déclarations
je les ai divisés et le résultat est 5 reste 10. Donc
nous jusqu'à 5 les déclarations et nous
trouvons "à la folie". Mais il y a reste 10 alors nous
repartons de "à la folie" et cette fois
nous trouvons "beaucoup".

(D)

Je fume un peu beaucoup passionnément à la folie pas du tout


La déclaration terminera par "passionnément".

DOCUMENT 3

(E)

Guillaume

$$6 \times 7 = 42$$

$$6 - 2 = 4$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 7 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 2 \\ \hline 4 \end{array}$$

J'ai compté combien il y avait de mot j'ai
trouvé 6 fois j'ai divisé 6 par 40 et j'ai
trouvé 7 j'ai fait 7×6 et égale à 42 j'ai
fait $6 - 2 = 4$

(F)

Grégoire
 7 2 0 2 1 5 faire 2 5 3 1 3 7
 2 5 1 6 1 0 un peu 2 6 3 1 3 8
 3 9 5 1 1 beaucoup 1 7 3 3 2 9
 1 0 1 5 2 8 passionnément 3 1 1 0
 5 1 0 1 2 3 à la folie 2 0 3 5
 6 1 2 1 1 1 pas du tout 3 0 3 6

On termine cette déclaration "passionnément".