

Résolution de problèmes

--

A. Analyser et représenter des problèmes

Exercice 1. On donne ci-dessous une liste de problèmes

1. Résoudre chacun à l'aide d'un schéma en barres comme celui donné pour le problème 1.
2. Classer ces problèmes selon la catégorisation de Vergnaud.

Problème 1 : J'ai 8 billes. Je perds 5 billes. Combien ai-je de billes ?

Problème 2 : J'ai 8 billes en tout, des billes rouges et des billes bleues. Cinq billes sont rouges. Combien de billes sont bleues ?

Problème 3 : J'ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?

Problème 4 : J'ai gagné 8 billes puis j'ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes ?

Problème 5 : J'ai 5 billes, je gagne 3 billes, combien ai-je de billes maintenant ?

8	
5	?

B. Analyser des erreurs et procédures d'élèves à l'aide des compétences

Extrait de la note de service n° 2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

« Modéliser » et « Calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.

« La formalisation de ces exemples-types doit être l'occasion **d'introduire des représentations**, sous forme de schémas bien adaptés, permettant **la modélisation** des problèmes proposés. Ces représentations sont systématiquement utilisées lors des résolutions de problèmes menées face à la classe, afin de servir de référence aux élèves. Elles ne sont bien sûr jamais rendues obligatoires (en particulier pour les élèves en réussite qui n'en ont pas besoin), mais doivent servir de point d'appui, lors des séances d'enseignement, avec les élèves rencontrant des difficultés lors de la résolution d'un problème. »

Exercice 2. CRPE 2021

Une enseignante propose la situation suivante en cycle 2 :

« Pour le carnaval, la directrice d'école a acheté 71 masques. Il y a 42 masques de souris, 18 masques de chats et des masques de chiens. Combien y a-t-il de masques de chiens ? »

Les productions de 4 élèves sont reproduites ci-dessous.

Elève A	Elève B
42 + 18 = 60 $\begin{array}{r} 42 \\ + 18 \\ \hline 60 \end{array}$ Il y a que 11 masques de chiens.	71 masques 42 18 11 j'ai fait 42 + 18 + 11 = 71
Elève C	Elève D
71 + 42 + 18 = 111 $\begin{array}{r} 71 \\ + 42 \\ + 18 \\ \hline 111 \end{array}$ J'ai fait 71 + 42 + 18 j'ai donc 111.	71 + 42 + 18 = 111 71 + 42 + 18 = 111 71 + 42 + 18 = 111 42 + 18 + 11 = 71 Il y a 11 masques de chiens.

- En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».
- En proposant le second problème ci-dessous, quelles erreurs risqueraient de ne pas être détectées ?

« Pour le carnaval, la directrice d'école a acheté 42 masques de souris et 18 masques de chiens. Combien la directrice a-t-elle acheté de masques au total ? »

- Proposer deux pistes de remédiation qui pourraient être mises en œuvre pour l'élève C.

Exercice 3. CRPE 2021

Après avoir introduit les nombres décimaux et l'addition des nombres décimaux, un enseignant de CM1 propose à ses élèves le problème ci-dessous.

Chez le fromager, Madame Costa a dépensé 41 €.

Elle a acheté une part de comté à 18,28 €, une part de beaufort à 15,72 € et un reblochon.

Combien a coûté le reblochon ?

On a retranscrit ci-dessous les réponses de quatre élèves.

$$\begin{array}{r} 111 \\ 41 \\ + 18,28 \\ + 15,72 \\ \hline 34,41 \end{array}$$

La réponse est 34,41 €.

ÉLÈVE A

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ + 18 \quad 28 \\ + 15 \quad 72 \\ \hline 33 \quad 100 \end{array}$$

$33 + 100 = 34$

$41 - 34 = 11 - 4 = 7$

Il coûte 7 euros.

ÉLÈVE B

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ + 18,28 \\ + 15,72 \\ \hline 33,100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 313,100 \\ \hline 8,100 \end{array}$$

$41 \text{ €} - 33,100 \text{ €} = 8,100 \text{ €}$

Le reblochon coûte 8,10 €

ÉLÈVE C

$$\begin{array}{r} 111 \\ 18,28 \\ + 15,72 \\ \hline 34,00 \end{array}$$

$41 + 34 = 70 + 5 = 75$

Le reblochon a coûté 75 €.

ÉLÈVE D

- Justifier qu'il est possible de proposer un tel problème alors que la soustraction des nombres décimaux n'a pas encore été étudiée.
- En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les productions des quatre élèves en termes de réussites et d'erreurs pour chacune des compétences « Modéliser » et « Calculer ».
- Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider l'ÉLÈVE A à résoudre ce type de problème.

Exercice 4. CRPE 2022 – problème de math en fait...

Un enseignant d'une classe de CM2 a proposé ce problème à ses élèves.

*Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues. En tout il a 51 billes.
Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?*

D'après un problème du Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen, Ministère de l'éducation nationale, 2021

- Voici la réponse proposée par Samira, une élève de la classe de CM2 :

Vertes

Rouges

Bleues **3**

} 51 billes

$51 - 3 = 48$

$6 \text{ } = 48$

$\text{ } = 8$ $4 \times 8 = 32$

$8 + 3 = 11$

Il a 8 billes vertes, 32 billes rouges et 11 billes bleues, ça fait bien 51 billes.

Proposer une version corrigée du schéma utilisé par Samira pour résoudre le problème.

1bis. En CM2, le problème proposé est-il un problème basique, complexe ou atypique ?

2. a. En notant v le nombre de billes vertes, déterminer, en fonction de v , le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues.
- b. Mettre le problème en équation et la résoudre pour répondre algébriquement à la question posée dans l'énoncé.

Exercice 5. D'après CRPE 2001. On propose le problème suivant à des élèves de CM2 :

En 1990, Lucien a acheté deux pains à 3,50 F chacun ; trois croissants à 3,80 F pièce ; et une tarte aux pommes. Il a payé 69,50 F. Quel était le prix de la tarte aux pommes ?

1. Selon la catégorisation de C. Houdement (problèmes atypiques, basiques, complexes), à quelle catégorie ce problème appartient-il ?

2. On donne ci-dessous les productions de 4 élèves.

- a. Analyser l'erreur de Benoit et en indiquer les origines possibles.
- b. Décrire la procédure de Christian. Quelle erreur a-t-il commise ?
- c. Décrire la procédure d'Aline. Sur quelle variable didactique agir pour la faire changer de procédure ?
- d. Repérer et analyser l'erreur de Denis.

3.** Sachant que le prix d'un croissant dans la boulangerie de Lucien est maintenant de 1,20 €, de combien (en euros) le prix d'un croissant a-t-il augmenté ? Dans quelle proportion¹ ce prix a-t-il augmenté ?

BENOIT

La tarte aux pommes coûte 62,20 F

$$\begin{array}{r} 3,50 \\ + 3,80 \\ \hline 7,30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69,50 \\ - 7,30 \\ \hline 62,20 \end{array}$$

CHRISTIAN

$3,50 \times 2 = 7,00$
 $7,00$ est le prix de deux pains.
 $3,80 \times 3 = 11,40$
 $11,40$ est le prix de trois croissants.

$69,50 - 7,00 - 11,40 = 50,60$
 $50,60$ est le prix d'une tarte aux pommes.

$$\begin{array}{r} 3,50 \\ \times 2 \\ \hline 7,00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,80 \\ \times 3 \\ \hline 11,40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69,50 \\ - 7,00 \\ - 11,40 \\ \hline 50,60 \end{array}$$

¹ On cherche donc le rapport entre l'augmentation du prix entre 1990 et 2022 et le prix en 1990 : (prix 2022 – prix 1990)/prix 1990... Le tout dans la même unité (franc ou euro)

ALINE

$3,50 + 3,50 + 3,80 + 3,80 + 3,80$
 prix des deux pains et des trois croissants
 prix de la tarte aux pommes $69,50 - 18,40 = 51,10$
 la tarte aux pommes coûte 51,10

$$\begin{array}{r} 3,50 \\ + 3,80 \\ + 3,50 \\ + 3,80 \\ + 3,80 \\ \hline 18,40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69,50 \\ - 18,40 \\ \hline 51,10 \end{array}$$

DENIS

Les deux pains coûtent 7,00 francs et les
 trois croissants coûtent 11,40 francs. La
 tarte aux pommes coûte 48,90 francs

$$\begin{array}{r} 3,50 \\ \times 2 \\ \hline 7,00 \end{array} + \begin{array}{r} 3,80 \\ \times 3 \\ \hline 11,40 \end{array} = 18,40$$

$$\begin{array}{r} 18,40 \\ + 69,50 \\ \hline 87,90 \end{array}$$

Exercice 6. Extrait du document ressource : « Résolution de problèmes au cycle 3 ».

Problème : Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed. Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds. Julien a 4 zeds. Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?

- Résoudre ce problème en expliquant les étapes de votre raisonnement.
- Traduire ce problème par un calcul en ligne.
- Vous trouverez ci-dessous quatre propositions de réponses. Essayez de les analyser c'est-à-dire de faire des hypothèses sur les erreurs éventuelles des élèves.

A. 1,06 zed	B. 1,16 zed	C. 5,06 zeds	D. 5,16 zeds
-------------	-------------	--------------	--------------

Cet exercice donné lors de l'évaluation TIMSS² a eu un taux de réussite de 42%

² Timss : Trends in International Mathematics and Science Study ; enquête internationale mesurant les acquis des élèves de CM1 en mathématiques et en sciences.

C. Résolution de problèmes : la division

Exercice 7.

On effeuille une marguerite de 40 pétales en disant : "je t'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout ; je t'aime, un peu, etc." Par quelle déclaration terminera-t-on ?

- 1) Résoudre le problème.
- 2) les documents 1, 2 et 3 sont constitués par les productions de six élèves de CM2, en réponse au problème ci-dessus.
 - a) Identifier les différents types de procédures utilisées, en précisant leurs avantages et leurs inconvénients.
 - b) Analyser chaque production (qualités, défauts, erreurs).
 - c) Que proposeriez-vous pour amener les élèves A et D à utiliser une procédure experte

Sujet 98 de l'Académie de Lyon

DOCUMENT 1

Lachita (A)

(A)

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 -16 \\
 \hline
 24 \\
 -16 \\
 \hline
 8 \\
 -6 \\
 \hline
 2 \\
 -2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

passionnément

J'ai enlevé 6 pétales de la marguerite quand même je me suis rapproché de la fin et j'ai reculé en disant je t'aime, puis quand je suis tombé sur le 0 j'ai écrit ma réponse.

(B)

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 4 \overline{) 6} \\
 \hline
 16
 \end{array}$$

aline

je t'aime

1. un peu
2. beaucoup
3. passionnément
4. à la folie
5. je t'aime
6. un peu
7. beaucoup

Réponse : un peu beaucoup

j'ai fait une division comme il restait 4 pétales et que j'ai trouvé 6 et j'ai ajouté 6+8 qui a fait 14. ensuite j'ai dit les phrases jusqu'à la huitième et j'ai trouvé la

DOCUMENT 2



©

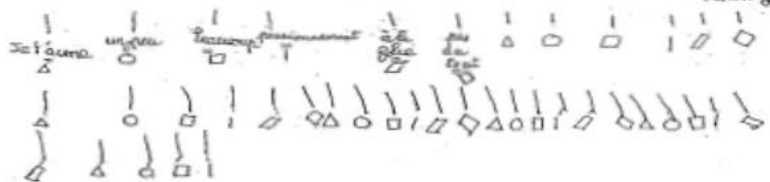
40	6
10	5

$$40 : 6 = 5 \text{ r } 10$$

La déclaration est "vraiment"

J'ai pris les 40 pétalos et les 6 déclarations
je les ai divisés et le résultat est 5 reste 10. Donc
nous jusqu'à 5 les déclarations et nous
divisons "à la folie". Mais il y a reste 10 alors nous
repartons de "à la folie" et cette fois
nous divisons "beaucoup".

ⓓ



La déclaration terminera par "passonnement".

DOCUMENT 3

Ⓔ

Guillaume

$$6 \times 7 = 42$$

$$6 - 2 = 4$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 7 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ -2 \\ \hline 4 \end{array}$$

J'ai compter combien il y avait de mot j'ai
trouver 6 puis j'ai divisé 6 par 40 et j'ai
trouver 7 j'ai fait 7×6 et égale à 42 j'ai
fait $6 - 2 = 4$

Ⓢ

Ergonomics

7 2 2236 faire 223637
 8 2 1620 un peu 223638
 3 9 4521 franc-compt 223639
 1 204589 franc-comptement 223640
 5 112293 à la p. 223635
 6 122222 pas de 223636

On termine cette déclaration "fractionnement"

D. Résoudre des problèmes

Exercice 8. Résoudre chacun des problèmes ci-dessous, issus du document ressource Eduscol « Résolution de problèmes au cycle 3 ». Analyser ces problèmes en indiquant à quelles catégories ils appartiennent, selon la classification de C. Houdement et selon la classification des problèmes additifs (Vergnaud) ou multiplicatifs.

Problème_1: « Marius revient du marché. Il a acheté 750 g de fraises, un demi-kilogramme d'abricots et a oublié la masse des kiwis achetés. Le contenu de son panier pèse 1,650 kg. Quelle est la masse des kiwis ? »

Problème_2: Jean part de Paris, il doit passer par Melun et être à Fontainebleau à 10 heures ; la distance Paris-Fontainebleau est de 65 km et il y a 15 km de Melun à Fontainebleau. Quelle est la distance entre Paris et Melun ?

Problème_3: Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : « J'ai exactement 32 ans de moins que toi ! » Quel est l'âge de Maman ?

Problème_4: « Amir, Naël et Jeanne ont ramassé des fraises dans leur jardin. Amir en a ramassé 3,4 kg et Naël 1,5 kg. Ensemble, les deux frères en ont ramassé 2,6 kg de plus que leur sœur. Quelle masse de fraises Jeanne a-t-elle ramassée ? »

Problème_5: Une famille de 3 personnes séjourne pendant 6 jours à la résidence « des 3 îles » ; le tarif journalier de la pension est de 45€ par personne. Calcule le montant de la dépense. »

Problème_6: Pour Noël, Jean, qui dispose de 84€, a décidé d'offrir le même livre à ses 4 amis ; il paye 74€. Quel est le prix d'un livre ? »

Problème_7: « Un rallye cycliste comporte 105 km ; le départ est à 7 heures le matin ; les relais sont distants de 5 km ; chaque participant doit pointer au départ, à chaque relais, et à l'arrivée. Combien de fois doit-il pointer ? »

Problème_8: Maëlys a acheté 4 planches de 2,5 mètres de long chacune. Combien de planches de 1 mètre de long peut-elle scier à partir de ces planches ? »

Problème_9: Agathe et Ben ont dépensé 65€. Agathe et Chloé ont dépensé 185€. Chloé a dépensé trois fois plus que Ben. Combien Agathe a-t-elle dépensé ?

Problème_10: Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et il y a 7 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes rouges ? »

Problème_11: Un restaurant propose un menu du jour à 18€ ; il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents (entrée-plat-dessert) peut-on constituer ?

Problème_12: Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. Pour faire chercher le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes. Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la ferme ?

Problème_13: Combien peux-tu écrire de nombres à deux chiffres en utilisant uniquement les chiffres 2, 3, 4 et 5 ? Le même chiffre ne peut être utilisé qu'une fois.

Problème_14: La somme des chiffres de l'année 2022 est 6. Trouve toutes les années entre l'an 2000 et l'an 3000 qui ont une somme de leurs chiffres égale à 6.

Problème_15: Lors d'une expédition en Amazonie, 21 voyageurs avec 45 caisses de matériel doivent utiliser une pirogue pour se rendre au point de départ de leur expédition. Le conducteur de la pirogue leur annonce qu'il ne peut transporter que 5 voyageurs à la fois, car il n'a que 5 gilets de sauvetage en plus du sien. Pour des raisons de place dans la pirogue, il ne peut transporter que 7 caisses de matériel à la fois, quel que soit le nombre de personnes transportées. Combien faut-il prévoir de voyages en pirogue pour transporter l'intégralité des voyageurs et de leur équipement ?

Exercice 9. Résoudre chacun des problèmes ci-dessous. Un schéma en barres peut aider...

Problème 1. Lorenzo a 35 €. Il en utilise les $\frac{3}{5}$ pour s'acheter un manteau. Combien lui reste-t-il d'argent après son achat ?

Problème 2. Manon mange la moitié du gâteau au chocolat et Laura un tiers. Quelle fraction du gâteau reste-t-il ?

Problème 3. Urbain dépense le tiers de son argent, puis la moitié de ce qui lui reste. Il n'a plus alors de 3 euros dans son portefeuille. Combien avait-il au départ ?

Problème 4. Alice dépense 60 % de son argent de poche pour acheter un livre. Elle donne les $\frac{3}{4}$ de ce qui lui reste pour rembourser son frère. Maintenant elle n'a plus que 5€. Quelle était sa fortune au départ ?

Problème 5. 25% des personnes à un pique-nique étaient des adultes. Un sixième des autres étaient des filles. S'il y avait six adultes, combien de garçons étaient présents au pique-nique ?

Problème 6. A une fête sportive, deux fois plus d'élèves ont choisi le basket que la natation. Le nombre d'élèves qui ont choisi le basket est un quart du nombre d'élèves qui ont choisi le foot. Si 210 élèves de plus ont choisi le foot que la natation, combien d'élèves ont choisi le basket ?