

Développer, factoriser, réduire : ça veut dire quoi ?

- Développer une expression, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique.
- Réduire une expression déjà développée, c'est écrire l'expression avec le moins de termes possibles.
- Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Exemples :

$A = x^2 - 5x + 7$	A est développée et réduite.	Ses termes sont x^2 , $-5x$ et 7 .
$B = 5x(x + 3)$	B est factorisée.	Ses facteurs sont $5x$ et $x + 3$.
$C = \frac{2}{3}x^2 - 1$	C est développée et réduite.	Ses termes sont $\frac{2}{3}x^2$ et -1 .
$D = x^2 - 4x + 7x^2 - 1$	D est développée mais pas réduite.	Ses termes sont au nombre de quatre, ils pourraient être réduits à trois ($x^2 + 7x^2 = 8x^2$)
$E = (-3x + 1)^2$	E est factorisée.	Ses facteurs sont $-3x + 1$ et $-3x + 1$.

Soustraire une expression à une autre expression

Propriété : soustraire une expression, revient à ajouter son opposé !

Exemple : $R = 3x - 5 - (4x - 7)$ —→ ici on veut soustraire $(4x-7)$ à $3x-5$.

$R = 3x - 5 + (-4x + 7)$ —→ soustraire $(4x-7)$ revient à ajouter son opposé qui est $(-4x+7)$

$R = 3x - 5 - 4x + 7$ —→ on peut supprimer la 2^{ème} parenthèse car précédée du signe +.

Une autre façon d'expliquer ...

Si une parenthèse est précédée du signe +, on peut supprimer les parenthèses sans changer les signes des termes de cette parenthèse. Exemple : $6 + (7 - 8) = 6 + 7 - 8$

Si une parenthèse est précédée du signe -, on peut supprimer les parenthèses à condition de changer tous les signes des termes de cette parenthèse. Exemples : $6 - (7 - 8) = 6 + (-7 + 8) = 6 - 7 + 8$

$$6 - (-7 - 8) = 6 + (+7 + 8) = 6 + 7 + 8$$

La distributivité pour développer des expressions

A - La distributivité simple

Propriété

Pour tous nombres relatifs k , a et b :

$$\begin{aligned} k \times (a + b) &= k \times a + k \times b \\ k \times (a - b) &= k \times a - k \times b \end{aligned}$$

Exemple : Développe l'expression suivante : $C = -3,5(x - 2)$.

$C = -3,5 \times (x - 2)$ —→ On remplace le signe $\times$ dans l'expression.

$C = (-3,5) \times x + (-3,5) \times (-2)$ —→ On distribue le facteur $-3,5$ aux termes x et -2 .

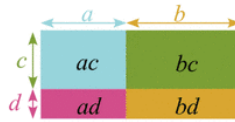
$C = -3,5x + 7$ —→ On calcule et on simplifie l'expression.

B - La double distributivité

Propriété

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Exemple : Développe et simplifie l'expression suivante : $D = (3x + 1)(y - 4)$.

$D = (3x + 1)(y + (-4))$	→	On transforme la soustraction.
$D = 3x \times y + 3x \times (-4) + 1 \times y + 1 \times (-4)$	→	On applique la double distributivité.
$D = 3xy - 12x + y - 4$	→	On calcule les produits et on simplifie.

La distributivité pour réduire et factoriser des expressions

Propriété

Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

➤ C'est la propriété de distributivité simple, mais dans le sens « factoriser »

Exemple : Factorise les expressions suivantes : $E = 14a - 7b$ puis $F = -x^2 + 3x$.

Cas où le facteur commun est une constante

$E = 7 \times 2a - 7 \times b$	→	On met en évidence le facteur commun : 7
$E = 7 \times (2a - b)$	→	On met en facteur le nombre 7 puis on regroupe les facteurs restants.

Cas où le facteur commun est un nombre désigné par une lettre

$F = (-x) \times x + 3 \times x$	→	On remplace les signes $\times$ sous-entendus dans l'expression et on repère le facteur commun : x .
$F = x(-x + 3)$	→	On met en facteur x puis on regroupe les facteurs restants.

source manuel de cycle 4

Autre exemple : Réduis l'expression $L = -3x + 7x$.

$L = x \times (-3) + x \times 7$	→	On met en évidence le facteur commun : x .
$L = x \times (-3 + 7)$	→	On met le nombre x en facteur.
$L = x \times 4$	→	On calcule $-3 + 7$.
$L = 4x$	→	On simplifie l'écriture de $x \times 4$. On obtient une forme réduite.

Les identités remarquables pour développer ou factoriser des expressions

Propriété : DEVELOPPER → $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ← FACTORISER	On développe puis réduit $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ $(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$ $(2x - 1)(2x + 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$ On factorise
--	---

Source : site maths-et-tiques (image modifiée)

Résolutions d'équations du premier degré (équations de la forme $ax + b = cx + d$)

Propriétés

Une égalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres.

Une égalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul**.

Pour tous nombres a , b et c :

si $a = b$ alors $a + c = b + c$

si $a = b$ alors $a - c = b - c$

si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$

si $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (où $c \neq 0$)

Sésamath

Exemple 1

Résoudre l'équation $x - 5 = 3$
 $x - 5 = 3$
 équivaut à : $x - 5 + 5 = 3 + 5$
 (on ajoute 5 à chaque membre de l'équation)

équivaut à : $x = 8$
 (on simplifie chaque membre)

La solution de l'équation est 8.

Exemple 2

Résoudre l'équation $-4x = 9$
 $-4x = 9$
 équivaut à : $-4x \div (-4) = 9 \div (-4)$
 (on divise chaque membre de l'équation par -4)

équivaut à : $x = \frac{-9}{4}$
 (on simplifie chaque membre)

La solution de l'équation est $\frac{-9}{4}$ (ou -2,25).

Exemple 3

Résoudre l'équation $\frac{x}{7} = 3$.
 $\frac{x}{7} = 3$
 équivaut à : $\frac{x}{7} \times 7 = 3 \times 7$
 (on multiplie chaque membre de l'équation par 7)

équivaut à : $x = 21$
 (on simplifie chaque membre)

La solution de l'équation est 21.

Exemple 4

Résoudre l'équation $3x + 5 = -7x - 4$
 $3x + 5 = -7x - 4$
 équivaut à : $3x + 5 - 5 + 7x = -7x - 4 - 5 + 7x$
 (on ajoute -5 et 7x à chaque membre de l'équation)

équivaut à : $10x = -9$ (on simplifie chaque membre)

équivaut à : $10x \div 10 = -9 \div 10$
 (on divise chaque membre de l'équation par 10)

équivaut à : $x = -0,9$.
 La solution de l'équation est -0,9.

Exemple 5 en vidéo : [ici](#)

Résolutions d'équations « produit nul »

➤ Qu'est-ce qu'une équation « produit nul » ?

C'est une équation écrite sous la forme d'un produit égal à zéro (c'est-à-dire nul).

Exemple : $(x + 12)(5x - 4) = 0$ est une équation produit nul (un membre est factorisé, l'autre vaut zéro).

➤ Comment résoudre une équation produit nul ?

Propriété : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un au moins de ses facteurs soit nul.

Exemple : résoudre $(x + 12)(5x - 4) = 0$

Pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un au moins de ses facteurs soit nul donc cette équation équivaut à : $x + 12 = 0$ ou $5x - 4 = 0$

Ce qui équivaut à $x = -12$ ou $x = \frac{4}{5}$ L'équation admet deux solutions : -12 et $\frac{4}{5}$

Un exemple complet (avec identité remarquable, distributivité et gestion du signe – devant parenthèse) :

1. Développer et réduire $L = (3x - 2)^2 - (3x - 2)(x + 7)$
2. Factoriser L .
3. Résoudre $L = 0$.

Réponse :

1. On développe chaque terme qui compose L : $(3x - 2)^2$ se développe avec la 2^{ème} identité remarquable et $(3x - 2)(x + 7)$ se développe à l'aide de la double distributivité :
 $L = (9x^2 - 12x + 4) - (3x^2 + 21x - 2x - 14)$
On supprime les parenthèses en veillant au changement de signes :
 $L = 9x^2 - 12x + 4 - 3x^2 - 21x + 2x + 14$
On réduit l'expression :
 $L = 6x^2 - 31x + 18$ (expression développée et réduite)
2. L s'écrit $(3x - 2)(3x - 2) - (3x - 2)(x + 7)$.
On constate que $(3x - 2)$ est un facteur commun, factorisons donc L :
 $L = (3x - 2)[(3x - 2) - (x + 7)]$
 $L = (3x - 2)(3x - 2 - x - 7)$
 $L = (3x - 2)(2x - 9)$ (expression factorisée)
3. Pour résoudre $L = 0$ on utilise la forme factorisée de L afin de se ramener à une équation produit nul.
 $L = 0$ équivaut à :
 $(3x - 2)(2x - 9) = 0$
Pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un au moins de ses facteurs soit nul :
 $3x - 2 = 0$ ou $2x - 9 = 0$
 $x = 2/3$ ou $x = 4,5$
L'équation admet deux solutions : $2/3$ et $4,5$

Propriétés

On **ne change pas** le sens d'une inégalité si on ajoute ou si on soustrait un même nombre à ses deux membres.

On **ne change pas** le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise ses deux membres par un même nombre **positif non nul**.

On **change** le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise ses deux membres par un même nombre **négatif non nul**.

Pour tous nombres a , b et c :

si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

si $a \leq b$ alors $a - c \leq b - c$

si $a \leq b$ et $c > 0$ alors

$a \times c \leq b \times c$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

si $a \leq b$ et $c < 0$ alors

$a \times c \geq b \times c$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

Sésamath

Exemples

■ Énoncé

Résous l'inéquation suivante d'inconnue x :

$$7x - 3 > 2x - 1.$$

Résous l'inéquation suivante d'inconnue x :

$$-3x - 8 \leq x - 1.$$

Correction

$$7x - 3 > 2x - 1$$

$$7x - 3 - 2x > 2x - 1 - 2x$$

$$5x - 3 > -1$$

$$5x - 3 + 3 > -1 + 3$$

$$5x > 2$$

$$x > \frac{2}{5}$$

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$

Correction

$$-4x - 8 \leq -1$$

$$-4x \leq 7$$

$$x \geq -\frac{7}{4}$$

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.

Sésamath