

IV) Résoudre des problèmes de proportionnalité

Dans quels cadres peut-on rencontrer des situations de proportionnalité ?

Notions au programme des cycles 3 et 4 en lien avec la proportionnalité :

- Proportions, ratios
- Agrandir ou réduire une figure
- Échelles d'une représentation
- Pourcentages
- Mouvement uniforme (vitesse, débit)
- Diagrammes circulaires
- Volume, aire et périmètre (formules)
- Théorème de Thalès
- Triangles semblables
- Homothéties
- Lignes trigonométriques (définitions)
- Fonctions linéaires
- Fonctions affines
- Nombre π

Exercice 1 :

Dans cet amphithéâtre, il y a 55 étudiants dont 8 garçons.

1) Quel est le pourcentage de garçons ?

$$\frac{8}{55} \times 100 \approx 14,5$$

Il y a environ 14,5% de garçons.

Remarque : on peut aussi faire un tableau de proportionnalité :

Etudiants	55	8
pourcentage	100%	x

2) Sachant que 15% des étudiants présents ne sont pas pris de petit déjeuner, à combien d'étudiants cela correspond-il ?

$$\frac{15}{100} \times 55 = 0,15 \times 55 = 8,25 \text{ donc environ 8 étudiants n'ont pas pris de petit-déjeuner}$$

Exercice 2 :

Sur une étiquette d'une canette de soda, on peut lire :

« Teneur en sucre : 10,8 g pour 100 mL de boisson. »

1) Quelle quantité de sucre contient une canette de 330 cL ?

Quantité de boisson (en mL)	100	330
Teneur en sucre (en g)	10,8	35,64

On peut utiliser la linéarité multiplicative (ou le produit en croix)

$10,8 \times 3,3 = 35,64$. Une canette de soda contient donc 35,64 g de sucre

2) À combien de morceaux de sucre de 6 g cela correspond ?

$35,64 : 6 = 5,94$. Cela correspond donc à presque 6 morceaux de sucre !



Exercice 3 :

1) Quelle est l'échelle de cette carte ?

5 cm sur la carte correspond à 20 km en réalité

20 km = 2 000 000 cm

Une échelle est toujours donnée par la formule suivante :

$$e = \frac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}}$$

Attention, les deux distances doivent être exprimées dans la même unité

$$\text{Donc ici } e = \frac{5}{2\,000\,000} = \frac{1}{400\,000}$$

2) Sur une carte routière l'échelle est $\frac{1}{2\,000\,000}$

Sur une telle carte, par quelle distance sont représentées :

• Nancy – Dijon (192 km)

• Paris – Le Havre (211 km)

Distance sur la carte (en cm)	1	9,6	10,55
Distance réelle (en cm)	2 000 000	19 200 000	21 100 000

La distance Nancy-Dijon est représenté par un segment de longueur 9,6 cm et Paris-Le Havre par un segment de longueur 10,55 cm.

Remarque : on aurait aussi multiplier directement les distances réelles par $\frac{1}{2\,000\,000}$, c'est-à-dire les diviser par 2 000 000.

Exercice 4 : (d'après Mission indigo Hachette éducation)

La pointure de chaussure en France est proportionnelle à la longueur du pied.
Un pied de 24 cm chausse du 36.



Longueur du pied (en cm)	24	x	27	4
Pointure	36	39	y	z

1) La professeure de mathématiques chausse du 39, à quelle longueur de pied cela correspond-il ?

On utilise le produit en croix : $x = \frac{24 \times 39}{36} = 26$. La longueur du pied est 26 cm

2) La longueur du pied de Rayan est 27 cm. Quelle est sa pointure ?

On utilise le produit en croix : $y = \frac{36 \times 27}{24} = 40,5$. La pointure de Rayan est 40,5

3) Si la longueur du pied augmente de 4 cm, de combien augmente la pointure ?

On utilise le produit en croix : $z = \frac{4 \times 36}{24} = 6$. La pointure augmente de 6cm.

4) Expliquer comment on calcule sa pointure en connaissant la longueur de son pied.

On calcule le coefficient de proportionnalité : $36 : 24 = 1,5$

On doit donc multiplier la longueur du pied par 1,5 pour obtenir la pointure.

5) À 11 ans le pied d'Enzo mesurait 22,5 cm. En 10 ans, son pied s'est allongé de 20 %.

a. Quelle est la longueur du pied d'Enzo à 21 ans ?

Augmenter de 20% revient à multiplier par 1,2.



$22,5 \times 1,2 = 27$. Le pied d'Enzo à 21 ans est donc de 27 cm.

b. Quelle est alors sa pointure ?

$27 \times 1,5 = 40,5$. La pointure d'Enzo est donc 40,5

c. Représenter la longueur du pied d'Enzo à 11 ans et à 21 ans par deux segments, à l'échelle $\frac{1}{4}$.

Exercice 5 : En 2019 à Berlin, Usain Bolt a battu le record du monde du 100 m.

<https://www.youtube.com/watch?v=X9isSTi-PIM>

1) Quelle a été sa vitesse moyenne en m/s ?

La vitesse moyenne s'obtient à l'aide de la formule $V = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue et t est le temps écoulé lors du trajet.

• En m/s : d=100 m et t = 9,58 s

$$V = \frac{100 \text{ m}}{9,58 \text{ s}} \approx \underline{10,44 \text{ m/s}}$$

2) Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

En km/h : d=100 m = 0,1 km et t = 9,58 s.

Or, 1h = 3600s donc $9,58 \text{ s} = \frac{9,58}{3600} \text{ h}$

$$V = \frac{0,1 \text{ km}}{\frac{9,58}{3600} \text{ h}} = 0,1 \times \frac{3600}{9,58} \approx \underline{37,58 \text{ km/h}}$$

Remarque : on peut aussi faire un tableau de proportionnalité !

Exercice 6 : Durant les soldes, un magasin pratique une remise de 15% sur tous ses articles.

1) Un article coûtait 28€ avant les soldes. Quel est son nouveau prix ?

Diminuer un prix de 15% revient à le multiplier par 0,85.

Donc $28 \times 0,85 = 23,8\text{€}$. Le nouveau prix est de 23,80€

2) On appelle f la fonction qui associe au prix de départ x, son prix soldé.

Donner l'expression de f(x) en fonction de x. Quelle est la nature de cette fonction ?

$f(x) = 0,85x$. La fonction f est une fonction linéaire de coefficient 0,85.

3) Un article coûtait 45€ avant les soldes. Quel est son prix soldé ?

On calcule l'image de 45 par la fonction f.

$f(45) = 0,85 \times 45 = 38,25$. Le prix soldé est 38,25 €.

4) Un article est soldé à 31,79€. Quel était son prix avant les soldes ?

On calcule l'antécédent de 31,79 par la fonction f, soit $0,85x = 31,79$

On a donc $x = \frac{31,79}{0,85} = 37,4$. Le prix avant les soldes était donc de 37,4€

Remarque : on aurait aussi pu faire un tableau de proportionnalité !

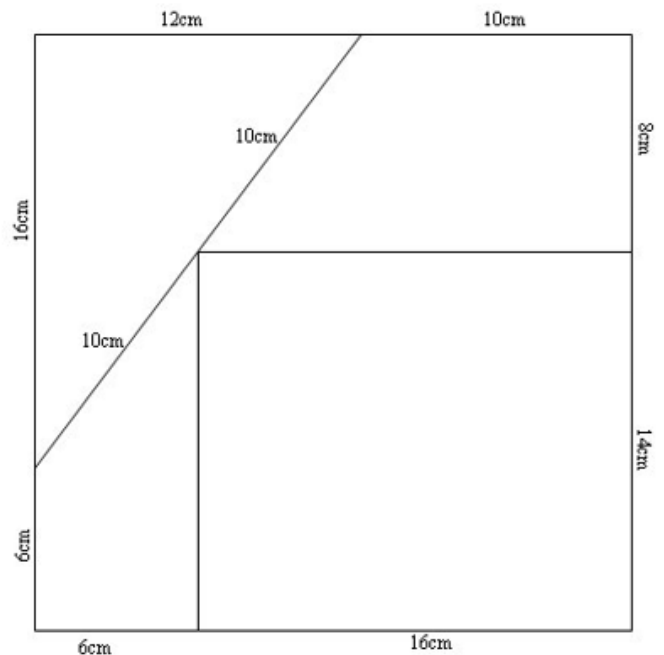


Exercice 7 : Le puzzle de Brousseau (à faire chez vous)

Vous devez agrandir chacune des pièces ci contre.

A la fin il faudra pouvoir le reconstituer avec les pièces agrandies.

Le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi

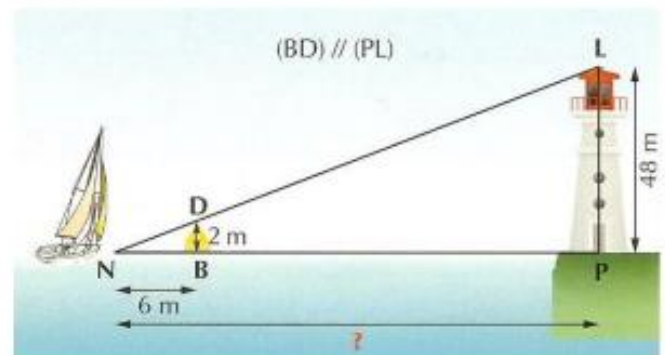


Exercice 8 :

Un plaisancier navigue près d'une bouée quand il s'aperçoit que le sommet de la bouée est aligné avec celui du phare qui se trouve sur la côte.

Aider le plaisancier à calculer NP sa distance à la côte connaissant les longueurs portées sur le schéma.

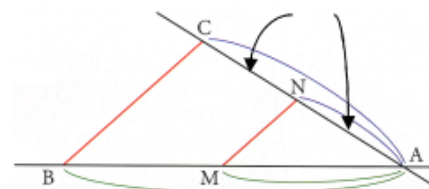
Rappel théorème de Thalès :



Ces 2 triangles ont leurs cotés correspondants proportionnels.

Dans un triangle ABC,
si - M est un point de [AB],
- N est un point de [AC],
- la droite (MN) est parallèle à la droite (BC),
alors les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés correspondants du triangle ABC.

Autrement dit : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



On sait que :

- $B \in [NP]$
- $D \in [NL]$
- $(BD) \parallel (LP)$

Donc d'après le théorème de Thalès $\frac{NB}{NP} = \frac{ND}{NL} = \frac{BD}{PL}$, donc $\frac{6}{NP} = \frac{2}{48}$ d'où $NP = \frac{6 \times 48}{2} = 144$ m

Exercice 9 : D'après CRPE 2023 (groupe 2)

Afin de préparer ses élèves à un cross, une enseignante décide de faire courir ses élèves dans la cour de l'école le long d'un parcours mesurant 309 m schématisé ci-contre (les longueurs sont exprimées en mètres)

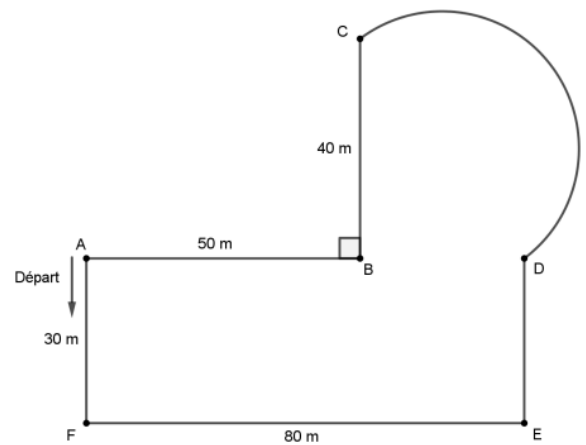
- 1) On souhaite construire un plan du parcours à l'échelle $\frac{1}{800}$.

Calculer les longueurs que les segments [AF], [FE] et [AB] mesureront sur le plan.

$$\text{Calcul de AF : } 30 \times \frac{1}{800} = \frac{30}{800} = 0,0375m = 3,75cm$$

$$\text{Calcul de FE : } 80 \times \frac{1}{800} = \frac{80}{800} = 0,1m = 10cm$$

$$\text{Calcul de AB : } 50 \times \frac{1}{800} = \frac{50}{800} = 0,0625m = 6,25cm$$



- 2) Kilian a effectué un tour complet en 3 minutes. A quelle vitesse Kilian a-t-il couru ? On donnera le résultat en mètre par seconde arrondi au centième, puis en kilomètre par heure, arrondi au dixième.

La vitesse moyenne s'obtient à l'aide de la formule $V = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue et t est le temps écoulé lors du trajet.

- En m/s : d = 309 m et t = 3 min soit 3 x 60s = 180 s

$$V = \frac{309m}{180s} \approx \underline{1,72 \text{ m/s}}$$

- En km/h : d = 309 m = 0,309 km et t = 180 s.

$$\text{Or, } 1h = 3600s \text{ donc } 180s = \frac{180}{3600}h = 0,05h$$

$$V = \frac{0,309km}{0,05h} = \underline{6,18 \text{ km/h}}$$

Kilian a couru à 6,18 km/h

Remarque : on aurait aussi pu faire un tableau de proportionnalité !

- 3) On suppose que Sophia court à une vitesse constante de 7 km/h.
Combien de tours complets pourrait-elle effectuer à cette vitesse en 18 minutes ?

Sophia parcourt 7km en 1h, c'est-à-dire 7000m en 60 minutes

Distance (en m)	7000	x
Temps (en min)	60	18

$$x = \frac{7000m \times 18min}{60min} = 2100m = \underline{2,1 \text{ km}}$$

Sophia a couru 2,1 km en 18 minutes. 1 tour complet mesure 309 m ,
donc $2100 : 309 \approx 6,8$ Sophia peut donc parcourir 6 tours complets.